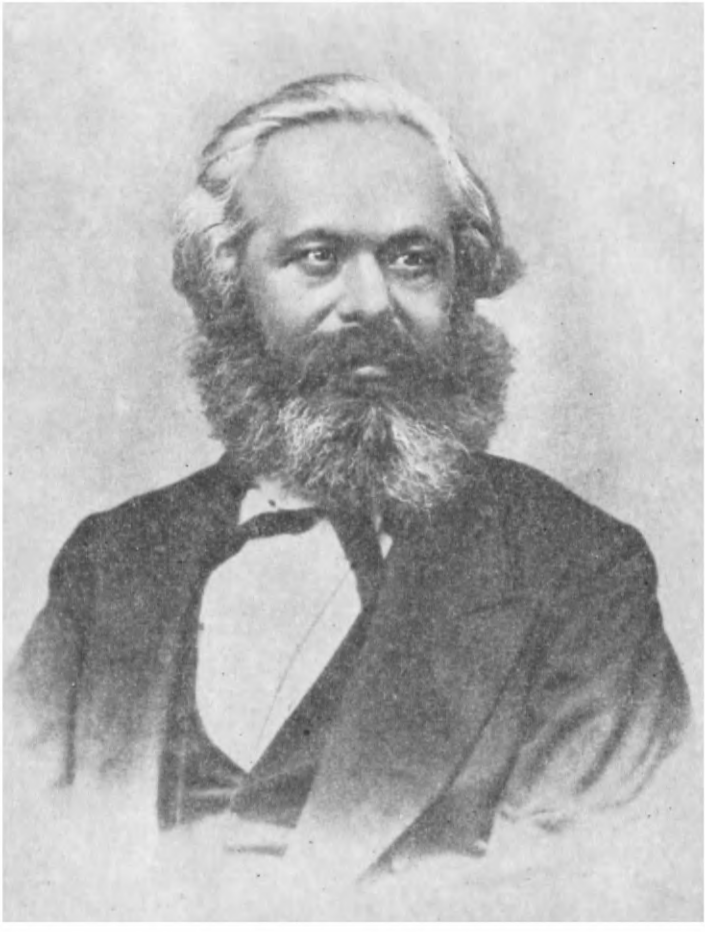
МАРКСИЗМ
И
ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

ГПАРТ
ИЗДАТ
1933



Пролетарии всех стран, соединяйтесь!

МАРКСИЗМ
И
ЕСТЕСТВОЗНАНИЕ

ПАРТИЙНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1933

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материалы и статьи, помещенные в настоящем сборнике, объединены задачей выяснить значение марксизма для развития естествознания и показать, что К. Маркс и Ф. Энгельс благодаря своему методу критически переработали все основные достижения естествознания, и создали совершенно новую теоретическую основу для его дальнейшего развития.

Первое место в сборнике занимают только что появившиеся в печати математические рукописи К. Маркса, представляющие непреходящий интерес.

Затем следует ряд статей о значении марксизма для отдельных областей естествознания: биологии, химии, физики.

Особого внимания заслуживают письма профессора Техасского университета Х. Д. Меллера и профессора Кембриджского университета Д. Ж. Стройка, наглядно показывающие всю силу предвидения В. И. Ленина, который еще в 1922 г. писал, что

«Без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного миросозерцания. Чтобы выдержать эту борьбу и провести ее до конца с полным успехом, естественник должен быть современным материалистом, сознательным сторонником того материализма, который представлен Марксом, т. е. должен быть диалектическим материалистом».

Партиздат

ОТ ИНСТИТУТА МАРКСА — ЭНГЕЛЬСА — ЛЕНИНА

Публикуемые математические рукописи Маркса относятся к концу 70-х и началу 80-х годов. Энгельс придавал большое значение математическим рукописям Маркса. В предисловии ко 2-му изданию «Анти-Дюринга» он выразил намерение издать их вместе со своими работами по диалектике природы. Этого намерения Энгельсу не удалось осуществить, и ни «Диалектика природы», ни эти рукописи не увидели света при жизни Энгельса.

Германская социал-демократия положила математические рукописи Маркса под сукно. Таким образом они опубликовываются впервые в СССР, на русском языке раньше чем на немецком.

Математические работы Маркса, носящие самостоятельный характер, распадаются на две части. В рукописях, относящихся к более раннему времени, речь идет о строках Тэйлора и Маклорена и «Теории аналитических функций» Лагранжа. В рукописях более поздних Маркс дает собственное обоснование диференциального исчисления. О нем как раз и говорится в переписке Маркса и Энгельса (письма от 18 августа 1881 г. и от 21 и 22 ноября 1882 г.).

Эта последняя—ниже публикуемая—часть работ в свою очередь подразделяется на три части, из которых третья (исторический очерк) имеется лишь в черновом наброске. Первые две печатаются по начисто отделанному Марксом для Энгельса тексту. В приложении как к первой, так и ко второй приведены разъясняющие текст варианты и отдельные заметки из черновых рукописей Маркса. Третья часть дана по черновому наброску.

Рукописи подготовлены к печати бригадой в составе тт. Яновской, Райкова и Нахимовской. Полностью математические рукописи Маркса будут опубликованы в одном из ближайших томов «Архива Маркса и Энгельса».

Институт
Маркса — Энгельса — Ленина
при ЦК ВКП(б)

I

ПРОИЗВОДНАЯ И СИМВОЛИЧЕСКИЙ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ КОЭФИЦИЕНТ [1])

1. *Алгебраическое дифференцирование простейших функций*

1

Пусть независимая переменная x возрастает до x_1 и значит зависимая переменная y до y_1.

Рассмотрим здесь sub 1) простейший случай, когда x фигурирует лишь в первой степени.

1) $y = ax$; если x возрастает до x_1, то $y_1 = ax_1$ и:

$$y_1 - y = a(x_1 - x).$$

Если бы мы теперь произвели дифференциальную операцию, т. е. дали бы x_1 уменьшиться до x, то получили бы: $x_1 = x$; $x_1 - x = 0$, следовательно $a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0$. Далее, так как y воз-

[1]) Все заглавия отделов и статей даны нами. Равным образом нам принадлежат все примечания. *Брат.*

росло до y_1 лишь вследствие того, что x возросло до x_1, то мы таким же образом имели бы: $y_1 = y$; $y_1 - y = 0$. Таким образом

$$y_1 - y = a(x_1 - x) \text{ превратилось бы в } 0 = 0.$$

Сначала полагание разности, а затем обратное ее снятие приводит таким образом буквально к н и ч е м у. Вся трудность в понимании дифференциальной операции (как и всякого о т р и ц а н и я о т р и ц а н и я вообще) и состоит как раз в том, чтобы увидеть, ч е м она отличается от такой простой процедуры и как ведет поэтому к действительным результатам.

Если мы разделим $a(x_1 - x)$, соответственно и левую сторону уравнения, на множитель $x_1 - x$, то получим:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Так как y является з а в и с и м о й п е р е м е н н о й, то оно вообще не может совершать никакого независимого движения. Поэтому y_1 не может стать $= y$, и значит $y_1 - y$ стать $= 0$, без того, чтобы до этого x_1 не стало x.

С другой стороны, мы видели, что x_1 не могло быть сделано x в функции $a(x_1 - x)$ без обращения последней в 0. Поэтому множитель $x_1 - x$ н е о б х о д и м о являлся к о н е ч н о й р а з н о с т ь ю в тот момент, когда мы разделили на него обе стороны уравнения. Таким образом в момент составления отношения $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, $x_1 - x$ всегда представляет собой конечную разность и следовательно $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ о т н о ш е н и е к о н е ч н ы х р а з н о с т е й; сообразно этому

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Итак,

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

где постоянная a фигурирует как п р е д е л [1]) (Grenzwert) отношения конечных разностей обоих переменных.

Так как a постоянно, то с ним не может происходить никакого изменения, а стало быть и с приведшейся к нему п р а в о й с т о р о н о й уравнения. При этих обстоятельствах д и ф е р е н ц и а л ь н ы й п р о ц е с с протекает на левой стороне $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это есть особенность таких простых функций, как ax.

Пусть в знаменателе отношения x_1 убывает, приближаясь к x; граница (Grenze) его убывания будет достигнута, как только оно превратится в x.

---

[1]) Маркс употребляет в этой работе термин Grenzwert, который мы переводим словом предел, в отличном от современного смысле. Так, если некоторая величина во всех своих изменениях остается равной некоторому выражению, сохраняющему неизменную форму, то Маркс рассматривает это последнее как п р е д е л изменений данной величины. В отличном от современного смысле им употребляется и термин м и н и м а л ь н а я в е л и ч и н а (Minimalgrosse), м и н и м а л ь н о е в ы р а ж е н и е (Minimalausdruck) и м и н и м а л ь н о е з н а ч е н и е (Minimalwert),

Тем самым разность $x_1 - x$ станет $= x - x = 0$ и поэтому также: $y_1 - y = y - y = 0$. Мы получим таким образом:

$$\frac{0}{0} = a.$$

Так как в выражении $\frac{0}{0}$ испарился всякий след его происхождения и значения, то мы заменяем его через $\frac{dy}{dx}$, где конечные разности $x_1 - x$ или Δx и $y_1 - y$ или Δy появляются символизированными как снятые или исчезнувшие разности; или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превращается в $\frac{dy}{dx}$. Итак:

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Утешение, за которое крепко держатся некоторые рационализирующие математики, именно, что, якобы, количественно $\frac{dy}{dx}$ есть в действительности лишь отношение бесконечно малых, лишь приближенно есть $\frac{0}{0}$, является химерой, как это будет еще очевиднее показано sub II).

Стоит еще упомянуть как особенность рассмотренного случая то обстоятельство, что как $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, так и $\frac{dy}{dx} = a$, т. е. предел (Grenzwert) [отношения] конечных разностей является одновременно и пределом [отношения] диференциалов.

2) В качестве второго примера того же случая может служить

$$\left.\begin{matrix} y = x \\ y_1 = x_1 \end{matrix}\right\}; y_1 - y = x_1 - x; \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

Так как $y = f(x)$, функция же x в ее развернутом алгебраическом выражении находится на правой стороне уравнения, то мы назовем это выражение первоначальной функцией от x, его первую модификацию, полученную путем полагания разности (durch Differentiation) — предварительной «производной» функцией x, а окончательный вид, который оно принимает в результате диференциального процесса — «производной» функцией от x.

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$. Если x возрастает до x_1, то:

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$
$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) + b(x_1^2 - x^2) + c(x_1 - x)$$
$$- a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 - x)(x_1 + x) + c(x_1 - x).$$

Отсюда:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c.$$

Предварительная «производная» $a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$ является здесь пределом отношения конечных разностей,

т. е. сколь бы малыми мы ни взяли эти разности, значение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будет дано этой «производной». Однако, она не совпадает как sub I) с пределом отношения диференциалов [1]).

Если в функции $a(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b(x_1 + x) + c$ переменная x_1 убывает и достигает границы (Grenze) своего убывания, т. е. становится равной x, то x_1^2 превращается в x^2, $x_1 x$ в x^2, $x_1 + x$ в $2x$, и мы получаем «производную» функцию x: $3ax^2 + 2bx + c$.

Здесь ярко обнаруживается, что:

Во-первых: для получения «производной» необходимо положить $x_1 = x$, стало быть в строгом [2]) математическом смысле $x_1 - x = 0$, без всяких увертюк насчет лишь бесконечного приближения.

Во-вторых: тем, что x_1 полагается $= x$ и значит $x_1 - x = 0$, в «производную» не вносится ровно ничего символического [3]). Введенная прежде изменением x величина x_1 не исчезает, она лишь приводится к своему минимальному пределу $= x$ и остается некоторым вновь введенным в первоначальную функцию x элементом, который, в комбинации частично с самим собой, частично с x первоначальной функции, дает окончательную «производную», т. е. предварительную «производную», приведенную к своей минимальной величине.

Приведение x_1 к x внутри первой (предварительной) «производной» функции превращает на левой стороне $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$, стало быть мы получаем:

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$

так что производная появляется как предел отношения диференциалов.

Трансцендентальное или символическое злоключение (Unglück) происходит лишь на левой стороне, но оно уже потеряло свой ужасающий вид, ибо выступает теперь лишь как выражение процесса, реальное содержание которого уже обнаружено на правой стороне уравнения.

В «производной» $3ax^2 + 2bx + c$ переменная x находится в совершенно других условиях [4]), чем в первоначальной функции x (именно, чем в $ax^3 + bx^2 + cx - e$). Поэтому эта производная в свою очередь может выступить в качестве первоначальной функции и при помощи возобнов-

---

[1]) После слов: «Однако она не совпадает как sub I) с пределом отношения диференциалов», в черновике:

«С другой стороны, диференциальный процесс происходит теперь в предварительной «производной» функции x (на правой стороне), причем это движение необходимо сопровождается тем же [диференциальным] процессом на левой стороне».

[2]) В черновике: «в строжайшем».

[3]) Вместо этого в черновике: «*b*) В процессе получения «производной» из первоначальной функции x мы сперва положили конечные разности (eine endliche Differentiation vornahmen), эта операция доставила нам предварительную «производную», являющуюся пределом для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Диференциальный процесс (Differentialprozess), к которому мы затем переходим, сводит этот предел к его минимальной величине. Введенная при первом диференцировании величина x_1 не исчезает» и т. д.

[4]) В черновике: «в другой комбинации».

ленного диференциального процесса стать матерью некоторой другой «производной». Это может повторяться до тех пор, пока переменная x не будет окончательно удалена из какой-либо «производной», значит для функций, представимых лишь бесконечными рядами, как это большей частью имеет место, — бесконечно.

Символы $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc показывают лишь родословную «производной» по отношению к первой заданной первоначальной функции x. Они становятся таинственными лишь поскольку их начинают трактовать как исходный пункт движения, а не как простые выражения последовательно произведенных функций x. Действительно, тогда представляется удивительным, что отношение исчезнувших должно пройти снова более высокие степени исчезновения, тогда как нет ничего удивительного в том, что например $3x^2$ так же хорошо может пробежать диференциальный процесс, как и ее родоначальница x^3. Ведь мы можем исходить и из $3x^2$ как первоначальной функции.

Однако, nota bene. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является исходным пунктом (Ausgangsstatte) диференциального процесса фактически лишь в уравнениях, какие мы имели sub I), где x входит лишь в первой степени. Но тогда, как показано sub I), в результате получается:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом здесь с помощью диференциального процесса, который пробегает $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, не находится на самом деле никакого нового предела, ибо последнее возможно лишь поскольку предварительная «производная» содержит переменную x [1]), т. е. поскольку $\frac{dy}{dx}$ остается символом некоторого реального процесса.

Это конечно никоим образом не препятствует тому, чтобы в диференциальном исчислении символы $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. и их комбинации образовывали и правые части уравнений. Но тогда мы знаем также, что такие чисто символические уравнения лишь указывают операции, которые затем надлежит выполнить над действительными функциями от переменных.

2) $y = ax^m$; если x превращается в x_1, то: $y_1 = ax_1^m$ и:

$$v_1 - y = a(x_1^m - x^m)$$
$$- a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc. до члена } x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Значит:

$$\frac{v_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta v}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ldots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Если мы теперь применим к этой «предварительной производной» диференциальный процесс, так что x_1 станет $= x$, или $x_1 - x = 0$,

[1]) В черновике за этим: «где, следовательно, ее движение может привести к действительному новому значению, а значит и $\frac{dy}{dx}$ служит символом некоторого реального процесса».

то x_1^{m-1} превратится в x^{m-1}; $x_1^{m-2}x$ в $x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1}$; $x_1^{m-3}x^2$ в $x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$, ... и наконец $x_1^{m-m}x^{m-1}$ в $x^0x^{m-1} = x^{m-1}$. Мы получим таким образом m раз функцию x^{m-1}, и «производная» будет поэтому: max^{m-1}.

Благодаря приравниванию $x_1 = x$ внутри «предварительной производной» [1]) на левой стороне $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ превратится в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$, откуда:

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}.$$

Можно бы изложить таким манером все операции дифференциального исчисления, но это было бы чертовски бесполезным педантизмом. Все же мы приведем здесь еще один пример, ибо в предыдущих разность $x_1 - x$ входила в функцию x лишь один раз и поэтому при составлении [отношения] $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ исчезала с правой стороны; это не имеет места в следующем случае:

3) $y = a^x$; если x превращается в x_1, то: $y_1 = a^{x_1}$. Отсюда:

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x$$
$$= a^x(a^{x_1-x} - 1).$$

Но

$$a^{x_1-x} = [1 + (a-1)]^{x_1-x}$$

и:

$$[1 + (a-1)]^{x_1-x} = 1 + (x_1 - x)(a-1) +$$
$$+ \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2 + \text{etc.}$$

Следовательно:

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1-x} - 1) =$$
$$= a^x\left\{(x_1-x)(a-1) + \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}$$
$$\therefore \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\left\{(a-1) + \frac{x_1-x-1}{1\cdot 2}(a-1)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}$$

Если теперь x_1 станет $= x$ и значит $x_1 - x = 0$, то мы получим для «производной» выражение:

$$a^x\left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Итак:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Если мы теперь обозначим сумму постоянных, стоящую в скобках, через A, то будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x.$$

[1]) Т. е. на правой стороне.

Но это $A =$ неперову логарифму числа a, стало быть: $\frac{dy}{dx}$ или, подставляя вместо y его значение,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$$

и

$$da^x = a^x \log a dx.$$

О замене символа $\frac{0}{0}$ символом $\frac{dy}{dx}$

(Заметки)

I

Показано, что

1) Если например $y - ax^m = f(x)$; $y_1 - ax_1^m$, то мы получим

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{0}{0} = max^{m-1}.$$

Было показано, что производная функция $f'(x)$ или max^{m-1} получается из первоначальной $f(x) - ax^m$ посредством полагания $x_1 = x$, т. е. $x_1 - x - 0$.

Но это же полагание $x_1 - x = 0$ или $x_1 = x$ превращает $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ в $\frac{0}{0}$, и мы пишем вместо последнего $\frac{dy}{dx}$, чтобы показать, каково происхождение этого $\frac{0}{0}$, т. е. какое отношение действительных разностей — в вышеприведенном случае $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ — превращается в конце концов в $\frac{0}{0}$.

Это тем более оправдано, что мы в результате получили

$$\frac{0}{0} = max^{m-1} = f'(x),$$

и этот результат $\frac{0}{0}$ на левой стороне уравнения был получен благодаря движениям, которые исходили от находящейся на правой стороне переменной x.

$\frac{0}{0}$ может быть равно любой величине X, так как $0 = X \cdot 0 = 0$. То, что в рассматриваемом случае $\frac{0}{0}$ равно не любой величине X, а $= max^{m-1}$, указывается символом $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{df(x)}{dx}$, показывающим вследствие каких движений независимой переменной x в некоторой определенной функции $f(x)$ возник этот символ $\frac{0}{0}$.

2) Но после того как смысл $\frac{dy}{dx}$, частные значения которого, естественно, меняются в зависимости от определенного вида самой $f(x)$, раз навсегда зафиксирован, и как только мы уже вступили на почву дифе-

ренциального исчисления, задача оборачивается. Именно, требуется посредством диференцирования найти для $\frac{dy}{dx}$ его частное значение, как например выше $= max^{m-1}$, т. е. производную функцию, которой он соответствует.

II

Отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ или $\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}$ или $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает:

разность между первоначальной величиной $f(x)$ и ее наращенным значением $f(x+h)$ и отношение доли (Rate), на которую возросла функция $x(=f(x))$, к доле роста (Wachstumsrate) переменной величины x, функцией которой она является. Это есть отношение разности функции от x к разности самой переменной величины x. В числителе мы имеем разность между функциями от x, в знаменателе — разность между первоначальной и наращенной величиной самой переменной величины x; в знаменателе мера изменения x, в числителе мера изменения его функции.

Δy есть первая разность y, а Δx — первая разность x. Если Δx становится $= 0$, то и Δy становится $= 0$, ибо y лишь постольку стал y_1, поскольку x превратилось в $x + \Delta x$. Ясно однако, что здесь Δy или $y_1 - y$ не только становится нулем, но что оно становится им лишь вследствие обращения в нуль Δx или становления $x_1 = x$.

Таким образом даже в исчезновении Δy сохраняется зависимость функции y от переменной величины x, функцией которой она является; превращение этого Δy в итоге в 0, его исчезновение само остается следствием исчезновения Δx — приращения переменной величины x; вплоть до нулификации [приращений] сохраняется зависимость функции y от переменной величины x. Но в выражении $\frac{0}{0}$ исчезло равным образом качественное отношение между функцией y и переменной величиной x, функцией которой она является; в выражении $\frac{0}{0}$ стерся всякий след качественного различия между числителем и знаменателем, между функцией переменной величины и самой переменной величиной.

Поэтому, чтобы выразить происхождение и смысл $\frac{0}{0}$, мы обозначаем исчезнувшее Δx через dx, благодаря чему исчезнувшее Δy уже само по себе превращается в dy.

Таким образом $\frac{dy}{dx}$ есть не только символ для $\frac{0}{0}$, но одновременно символ процесса, благодаря которому в определенных данных условиях первоначального уравнения возникло $\frac{0}{0}$; и оно выражает то, что не может выразить $\frac{0}{0}$ — именно, что превращение Δy в нуль возникает из качественного отношения функции y к переменной величине x и что поэтому превращение Δy в dy является следствием превращения Δx в dx. Значит в отрицании сохраняется отрицаемое качественное отношение. Наоборот, в $\frac{0}{0}$ не видно, что исчезает, выражена лишь

количественная сторона — именно, что исчез числитель и знаменатель тоже, и тем самым исчезает самое отношение; качественное отношение, которое существует, поскольку 0 в числителе есть лишь следствие 0 в знаменателе, следовательно сам является выражением зависимости функции от переменной величины, функцией которой она является, — не выражено. Совершенно верно, что $\frac{0}{0}$ может выражать любую величину, но точно так же и x может выражать любую величину; частное значение $\frac{0}{0}$, равно как и x, в каждом отдельном случае зависит от тех определенных условий или функций, в которых фигурирует это $\frac{0}{0}$ или x, определенных условий, из которых возникает $\frac{0}{0}$ или в которых изменяется x. Однако к символу $\frac{dy}{dx}$ для превращения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в $\frac{0}{0}$ нас приводит не только исследование процесса возникновения $\frac{0}{0}$, но [также и] результат, получающийся из первоначального уравнения. Именно, этот результат есть: $\frac{0}{0}=f'(x)$, а не $\frac{0}{0}=0$, или какое-либо другое произвольное реальное значение.

Сравнение марксова метода дифференцирования с методом Д'Аламбера

Сравним метод Д'Аламбера с геометрическим [1]).

I) $f(x)$ или $y=x^3$.
a) $f(x+h)$ или $y_1=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$,
b) $f(x+h)-f(x)$ или $y_1-y=3x^2h+3xh^2+h^3$,
c) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ или $\frac{y_1-y}{h}=3x^2+3xh+h^2$;

если $h=0$, то:

d) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}=3x^2=f'(x)$

II) $f(x)$ или $y=x^3$.
a) $f(x_1)$ или $y_1=x_1^3$,
b) $f(x_1)-f(x)$ или $y_1-y=x_1^3-x^3=(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)$,
c) $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ или $\frac{y_1-y}{x_1-x}=x_1^2+x_1x+x^2$;

если x_1 становится $=x$, то $x_1-x=0$, следовательно

d) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}(=x^2+xx+x^2)=3x^2$.

В обоих [методах] одно и то же, поскольку: если возрастает независимая переменная x, то возрастает и зависимая переменная y. Все сводится к тому, как выражено возрастание x. Когда x становится x_1, то $x_1-x=\Delta x-h$ (— неопределенной, однако всегда остающейся конечной, разности).

[1]) Повидимому описка. Маркс вероятно хотел написать «алгебраическим».

Δx или h есть приращение, на которое возросло x, ибо а) $x_1 = x + \Delta x$; но и наоборот b) $x + \Delta x$ или $x + h = x_1$.

Исторически диференциальное исчисление исходит из а), т. е. из того, что разность Δx или приращение h (одно выражает то же, что и другое, первое отрицательно, как разность Δx, второе положительно, как приращение h) самостоятельно существует рядом с величиной x, приращением которой оно является, которую оно таким образом выражает как возросшую, но возросшую на h. Этим с самого начала достигается то преимущество, что соответствующая этому общему выражению первоначальная функция возросшей переменной выражается в биномах определенной степени и поэтому уже с самого начала к ней становится применимой теорема о бином. Действительно уже на общей, левой стороне мы имеем бином, именно $[f](x + \Delta x)$ или $y_1 = \text{etc.}$

Мистическое диференциальное исчисление сразу превращает $x + \Delta x$ в $x + dx$ или, по Ньютону, в $x + \dot{x}$[1]). Благодаря этому мы и на правой, алгебраической стороне получаем сразу биномы $x + dx$ или $x + \dot{x}$, с которыми затем поступают как с обыкновенными биномами. Превращение Δx в dx или $\dot{x}$ допускается а приори, вместо того чтобы быть выведенным (abgewiesen) математически; отсюда и последующее мистическое отбрасывание (Unterdruckung) членов в разложении биномов.

Д'Аламбер исходит от $x + dx$, однако исправляет это выражение в $x + \Delta x$, соответственно $x + h$. Теперь уже становится необходимым развитие, которое превратило бы Δx или h в dx, но к этому и сводится все действительно происходящее развитие.

Исходят ли — неправильно — из $x + dx$ или — правильно — из $x + h$, этот неопределенный бином, будучи поставлен в заданную алгебраическую функцию от x, превращает ее в бином некоторой определенной степени (так в I а) вместо x^3 появляется теперь $(x + h)^3$, и притом в бином, где в одном случае dx, в другом h фигурирует в качестве последнего члена, и значит в разложении этого бинома только в качестве множителя внешне присоединенного к произведенным биномом функциям.

Поэтому уже в I а) мы находим в готовом виде первую производную от x^3, именно как $3x^2$, как коэфициент во втором члене ряда, снабженный множителем h. Начиная отсюда $3x^2 = f'(x)$ остается неизменным. Само оно не произведено никаким процессом диференцирования какого бы то ни было рода, но доставлено с самого начала теоремой о бином, и притом потому, что мы с самого начала представили возросшее x в виде бинома $x + \Delta x = x + h$, в виде x возросшего на h. Вся задача состоит теперь в том, чтобы высвободить (losschalen) совершенно готовую, а не лишь эмбрионально существующую [производную] $f'(x)$ от ее множителя h и прочих побочных членов.

Напротив, в II а) возросшее x_1 входит в алгебраическую функцию совершенно в той же форме, в какой в нее первоначально входило x: x^3 становится x_1^3. Производная $f'(x)$ может быть получена лишь к концу, в результате последовательного выполнения двух операций диференцирования, и притом имеющих каждая совершенно особый характер.

В уравнении I в) разность $f(x + h) - f(x)$ или $y_1 - y$ хотя и подго-

---

1) Маркс пишет $x + \dot{x}$ вместо ньютоновского $x + \tau x$, что и оговаривает в историческом очерке. См. стр. 45.

товляет появление символического дифференциального коэфициента, но в отношении к реальному не меняет ничего, кроме того, что передвигает его со второго места ряда на первое и тем самым делает возможным освобождение от h.

В II в) мы получаем выражения разностей на обоих сторонах. При развитии алгебраической стороны появляется $x_1 - x$ в качестве множителя при производной функции x и x_1, получающейся с помощью деления $x_1^3 - x^3$ на $x_1 - x$. Лишь наличие разности $x_1^3 - x^3$ сделало возможным разложение ее на два множителя. Так как $x_1 - x = h$, то оба множителя, на которые разложено $x_1^3 - x^3$, можно записать также в виде $h(x_1^2 + x_1 x + x^2)$. Это обнаруживает новое отличие от I в). Самое h в качестве множителя при предварительной производной произведено лишь через развитие разности $x_1^3 - x^3$ в произведение двух множителей, тогда как h в качестве множителя при «производной», как и сама эта последняя, в I а) существует уже готовым до всякого развития какой бы то ни было разности. То, что неопределенное возрастание x к x_1 принимает отделенную от x и существующую рядом с ним форму множителя h, в I подразумевается с самого начала, тогда как в II (так как $x_1 - x = h$) доказывается самим выводом. Хотя h I, с одной стороны, неопределенно, однако, с другой стороны, оно все же настолько уже определенно, что неопределенное возрастание x появляется уже как самостоятельная (eigene) величина, на которую x возросло, и поэтому как таковая выступает рядом с x.

Далее, в I c) $f'(x)$ освобождается от своего множителя h, и мы получаем на левой стороне $\frac{y_1 - y}{h}$ или $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, т. е. некоторое еще конечное выражение диференциального коэфициента. Но на другой стороне мы достигаем того, что полагая $h - 0$ в $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ и превращая таким образом это последнее в $\frac{0}{0} - \frac{dy}{dx}$, мы, с одной стороны, получаем в I d) символический диференциальный коэфициент, а с другой—существовавшая уже в I а) в готовом виде [производная] $f'(x)$ освобождается теперь от своих побочных членов и одна лишь фигурирует на правой стороне.

Положительное развитие происходит лишь на левой стороне, поскольку здесь получается символический диференциальный коэфициент. На правой стороне развитие заключается лишь в том, чтобы освободить $f'(x) = 3x^2$, которое уже в I а) было найдено с помощью бинома, от его первоначального сопровождения. Превращение h в 0 или $x_1 - x = 0$ имеет на правой стороне лишь этот отрицательный смысл.

Напротив, в II c) сначала получается предварительная производная — с помощью деления обоих сторон на $x_1 - x (= h)$.

Наконец, в II d) положительное полагание $x_1 - x$ дает нам окончательную производную. Но это полагание $x_1 = x$ означает одновременно полагание $x_1 - x = 0$ и превращает вследствие этого на левой стороне конечное отношение $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$.

В I «производная» столь же мало находится при помощи полагания $x_1 - x = 0$ или $h - 0$, как и в мистическом диференциальном методе. В обоих случаях устраняются с пути побочные члены, сопровождающие появляющуюся с самого начала в готовом виде [производную] $f'(x)$ — здесь математически правильно, там посредством coup d'état.

II

ДИФЕРЕНЦИАЛ и ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Переворот в методе. Дифференциал

I

1) Пусть нужно диференцировать $f(x)$ или $y=uz$, где u и z — функции, зависящие от независимой переменной x; они являются независимыми переменными относительно зависящей от них функции y, которая таким образом зависит также от x.

$$y_1 = u_1 z_1$$
$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z)$$
$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Если теперь на правой стороне x_1 станет $= x$, следовательно $x_1 - x = 0$, то $u_1 - u = 0$, $z_1 - z = 0$, следозательно и множитель z_1 в $z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ превратится в z, и наконец на левой стороне $y_1 - y = 0$.

Таким образом:

A) $$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Это уравнение, умноженное на общий всем его членам знаменатель dx, превращается в:

B) $$dy \text{ или } duz = zdu + udz.$$

2) Рассмотрим сперва уравнение A):

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

В уравнениях с одной лишь зависящей от x переменной конечный результат был всегда:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

где $f'(x)$ — первая производная функция от $f(x)$ — была свободна от всяких символических выражений, как например mx^{m-1} для случая, когда x^m есть первоначальная функция независимой переменной x. Именно вследствие процессов диференцирования, которые должна была пробежать функция $f(x)$, чтобы превратиться в $f'(x)$, — навстречу последнему, т. е. реальному диференциальному коэфициенту, появился на левой стороне в качестве символического эквивалента его двойник $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$. С другой стороны, $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$ нашло таким образом в $f'(x)$ свой реальный эквивалент. Наоборот, в уравнении A) $f'(x)$, первая производная от uz сама заключает в себе символические диференциальные коэфициенты,

которые поэтому стоят на обеих сторонах уравнения, между тем как реального значения нет ни на одной. Но так как uz применили тот же метод, как прежде к функциям x с одной лишь независимой [1]) переменной, то этот контраст в результатах происходит очевидно от специфического характера самой исходной функции, т. е. uz. Подробнее об этом sub 3). [Далее Маркс делает отступление, в котором разбирает вопрос о том, «нет ли в выводе уравнения A) какой-нибудь заковыки». Здесь мы это место опускаем. Вариант его приведен полностью на стр. 38—40.]

3) В ранее рассмотренных уравнениях, как $y=x^m$; $y=a^x$, etc, некоторой первоначальной функции от x противостоит «зависимая» от него y. В $y-uz$ обе стороны заняты «зависимыми». Если y здесь непосредственно «зависит» от u и z, то последние, в свою очередь, зависят от x. Этот специфический характер первоначальной функции uz необходимо накладывает свою печать на ее «производную».

Что u есть функция от x, а z — некоторая другая функция от x, можно выразить следующим образом:

$$u=f(x),\ z=\varphi(x),$$

поэтому

$$u_1-u=f(x_1)-f(x),$$
$$z_1-z=\varphi(x_1)-\varphi(x).$$

Но исходное уразнение не дает ни для $f(x)$, ни для $\varphi(x)$ первоначальных функций от x, т. е. определенных значений в x. Следовательно u и z фигурируют лишь как названия, как символы функций, зависящих от x; поэтому процессом вывода производной из uz доставляются непосредственно лишь общие формы этого отношения зависимости:

$$\frac{u_1-u}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$
$$\frac{z_1-z}{x_1-x}=\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x}$$

Когда процесс достигает такого пункта, где x_1 полагается $=x$, следовательно $x_1-x=0$, эти общие формулы превращаются в:

$$\frac{du}{dx}=\frac{df(x)}{dx},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

и символические диференциальные коэфициенты $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ позвляются как таковые внутри «производной».

Но в уравнениях с одной лишь зависимой переменной $\frac{dy}{dx}$ не имеет решительно никакого другого содержания, кроме того, которое имеют здесь $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Оно также есть лишь символическое диференциальное выражение для:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

[1]) Описка; должно быть «зависимой».

Хотя природа $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, т. е. вообще символических диференциальных коэфициентов, ничуть не меняется, если они появляются внутри самой производной, т. е. и на правой стороне диференциального уравнения, — тем не менее этим изменяется их роль, а также характер уравнения.

Представим, в общем виде, первоначальную функцию uz через $f(x)$, и значит ее первую «производную» через $f'(x)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Эту же общую форму мы получаем для уравнений с одной лишь зависимой переменной. В обоих случаях исходные формы $\frac{dy}{dx}$ возникают из процессов вывода, превращающих $f(x)$ в $f'(x)$. Как только поэтому $f(x)$ превратилось в $f'(x)$, последнему противостоит уже $\frac{dy}{dx}$ в качестве его собственного символического выражения, его двойника или символического эквивалента.

В обоих случаях $\frac{dy}{dx}$ играет поэтому одинаковую роль.

Иначе обстоит дело с $\frac{du}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$. Вместе с другими элементами производной $f'(x)$, в которую они включены, они находят в $\frac{dy}{dx}$ свое символическое выражение, свой символический эквивалент, но сами они, со своей стороны, не противостоят никаким $f'(x)$, $\varphi'(x)$, для которых они были бы символическими двойниками. Односторонне появились они на свет. Тени без тела, которое их отбрасывает; символические диференциальные коэфициенты без реальных диференциальных коэфициентов, т. е. без соответствующих эквивалентных «производных». Символический диференциальный коэфициент становится таким образом самостоятельным исходным пунктом. Его реальный эквивалент лишь должен быть найден. Таким образом инициатива передвинулась с правого, алгебраического полюса на левый, символический. Но тем самым и диференциальное исчисление выступает как некоторое специфическое исчисление, уже самостоятельно оперирующее на своей собственной почве. Ибо его исходные пункты: $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$. суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины. И это обращение метода получилось здесь как результат алгебраического диференцирования uz. Таким образом алгебраический метод сам собой превращается в противоположный ему диференциальный [1]).

---

[1]) Этот абзац в черновике:

«Обратно с $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$. Рожденные внутри производной, они находят вместе с остальными элементами последней в $\frac{dy}{dx}$ свое собственное символическое

Но что же представляют собой «производные», соответствующие символическим диференциальным коэфициентам $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$?

Исходное уравнение $y = uz$ не дает никаких данных для решения этого вопроса. На последний можно однако ответить, если вместо u и z подставить произвольные первоначальные функции от x, например:

$$u = x^4,$$
$$z = x^3 + ax^2.$$

Но тем самым символические диференциальные коэфициенты тотчас превращаются в оперативные символы, в символы процессов, которые должны быть произведены с x^4 и $x^3 + ax^2$ для нахождения их «производных». Возникший первоначально как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций диференцирования — символический диференциальный коэфициент играет теперь роль символа операций диференцирования, которые лишь нужно еще произвести.

Вместе с тем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

с самого начала чисто символическое, так как не имеет свободной от символов стороны, — превращается в общее символическое оперативное уравнение.

Замечу еще, что[1]) с начала XVIII в. до настоящего времени общая задача диференциального исчисления формулируется обычно так: найти для символического диференциального коэфициента его реальный эквивалент.

4)

A) $$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Очевидно, что это не простейшее выражение уравнения A), ибо все его члены содержат общий знаменатель dx. Отбросив его, получим:

B) $$duz \text{ или } dy = zdu + udz.$$

В B) исчез всякий след его происхождения из A). Оно справедливо поэтому как для случая, когда u и z зависят от x, так и для того случая, когда они — независимо от какого бы то ни было отношения к x — лишь взаимозависимы. Это — с самого начала символическое уравнение,

выражение, следовательно свой символический эквивалент. Но сами они появляются без эквивалентов, действительных диференциальных коэфициентов, т. е. без производных $f'(x)$, $\varphi'(x)$, символическими выражениями которых они со своей стороны были бы. Они перед нами как готовые диференциальные символы. Их реальные значения подобны теням, тело которых еще нужно отыскать. Таким образом задача буквально под руками, обернулась. Символические диференциальные коэфициенты становятся в полном смысле исходными пунктами, для которых эквивалент, действительный диференциальный коэфициент или соответствующую производную функцию еще нужно найти. Этим инициатива сдвинута с правого полюса на левый. Так как этот переворот метода возник из алгебраического движения функции uz, то он сам должен быть алгебраически обоснован».

[1]) В черновике: «что за небольшими исключениями».

и может с самого начала служить как символическое оперативное уравнение. В последнем случае оно утверждает, что если

$$y = uz \text{ etc.},$$

т. е. если y = произведению любого числа переменных, то dy — сумме произведений, в каждом из которых, последовательно, один из множителей рассматривается как переменный, остальные — как постоянные.

Для нашей цели, именно для дальнейшего исследования диференциала от y вообще, форма B) однако не подходит. Положим поэтому:

$$u = x^4,$$
$$z = x^3 + ax^2,$$

тогда

$$du = 4x^3 dx,$$
$$dz = (3x^2 + 2ax)dx,$$

как это было ранее показано для уравнений с одной лишь зависимой переменной. Вставим эти значения du и dz в уравнение A). Тогда:

A) $$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)\,4x^3 \frac{dx}{dx} + x^4(3x^2 + 2ax)\frac{dx}{dx},$$

следовательно:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + ax^2)4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax),$$

поэтому:

$$dy = \{(x^3 + ax^2)\,4x^3 + x^4(3x^2 + 2ax)\}dx.$$

Выражение в скобках есть первая производная от uz; но так как $uz = f(x)$, то его производная $= f'(x)$. Если мы подставим теперь последнюю на место алгебраической функции, то получим:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Мы получили уже тот же самый результат из любого уравнения с одной лишь зависимой переменной. Например:

$$y = x^m,$$
$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} = f'(x),$$
$$dy = f'(x)dx.$$

Вообще: если $y = f(x)$, то является ли эта функция от x (von x) некоторой первоначальной функцией в x (in x), или содержит зависимые переменные, всегда: $dy = df(x)$ и $df(x) = f'(x)\,dx$, так что

B) $$dy = f'(x)\,dx,$$

всеобщая (allgemeingültige) форма диференциала y.

II

1) Диференциал

$$dy = f'(x)dx$$

выглядит с самого начала подозрительней, чем диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, из которого он выведен.

В $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ числитель и знаменатель неотделимо связаны друг с другом; в $dy = f'(x)dx$ они на вид разделены, так что напрашивается вывод: $dy = f'(x)dx$ есть лишь замаскированное выражение для:

$$0 = f'(x) \cdot 0 \text{ или } 0 = 0,$$

с чем ничего не поделаешь («nix ze wolle»).

Французский математик первой трети XIX в.—Бушарла, который в совершенно другом смысле ясно, чем известный [1]) «элеган гный» француз, связал диференциальный метод с алгебраическим методом Лагранжа—говорит: «Если $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, например, то $\frac{dy}{dx}$ alias $\frac{0}{0}$ или вернее его значение $3x^2$, есть диференциальный коэфициент функции y. Так как $\frac{dy}{dx}$ есть таким образом символ, представляющий предел (Grenze) $3x^2$, то dx должно бы постоянно стоять [2]) под dy, но для облегчения алгебраических операций мы рассматриваем $\frac{dy}{dx}$ как обыкновенную дробь и $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ как обыкновенное уравнение. Освобождая его от знаменателя, мы получаем в результате выражение: $dy - 3x^2dx$, которое называется диференциалом от y».

Итак, для «облегчения алгебраических операций» вводят заведомо неверную формулу, которую окрещивают именем «диференциал».

В действительности казус не столь злостен. В $\frac{0}{0}$ [3]) числитель неотделим от знаменателя. Но почему? Ибо лишь неразделенные они выражают отношение, dans l'espece [в данном случае] сведенное к своему абсолютному минимальному выражению отношение $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$, где числитель потому лишь стал нулем, что нулем стал знаменатель. Разделенные, они—оба нули, теряют поэтому свое символическое значение, свой смысл.

Но как только $x_1 - x = 0$ получает в dx форму, которая неизменно представляет его как исчезнувшую разность независимой переменной x, а следовательно и dy как исчезнувшую разность функции от x или зависимой y—отделение знаменателя от числителя становится вполне допустимой операцией. Где бы теперь ни находилось dx, такая перемена

[1]) В черновике: «известный тебе».
[2]) В черновике не stehen—стоять, а stehen bleiben—оставаться.
[3]) В черновике: «в форме $\frac{0}{0}$».

места не затрагивает отношения к нему dy. Таким образом $dy=f'(x)\,dx$ выступает перед нами [1]) как другая форма для:

$$\frac{dy}{dx}\quad f'(x)$$

и может быть всегда последнею заменена.

2) Диференциал $dy-f'(x)\,dx$ получился путем непосредственного алгебраического вывода из A) (см. I). Но алгебраический вывод уравнения A) уже показал, что диференциальные символы, — dans l'espece [в данном случае] символический диференциальный коэфициент—возникающие первоначально лишь как символические выражения алгебраически выполненных процессов диференцирования, необходимо превращаются в самостоятельные исходные пункты, в символы лишь подлежащих выполнению операций, в оперативные символы. Вследствие этого и возникшие на алгебраическом пути символические уравнения превращаются в символические оперативные уравнения.

Таким образом мы вдвойне вправе рассматривать диференциал $dy=f'(x)\,dx$ как символическое оперативное уравнение. При этом мы знаем теперь a priori, что если в $dy=df(x)$ выполнить над $f(x)$ указанную посредством $df(x)$ диференциальную операцию, то результат будет: $dy=f'(x)\,dx$ и что отсюда окончательно получается:

$$\frac{dy}{dx}\quad f'(x).$$

Но лишь с того момента, когда диференциал функционирует как исходный пункт исчисления, завершено обращение алгебраического метода диференцирования, и самое диференциальное исчисление выступает поэтому как некоторое совершенно особое, специфическое исчисление с переменными величинами.

Чтобы сделать это более наглядным, подытожу в общем виде примененный мною алгебраический метод, заменяя определенные алгебраические выражения в x ($\ln x$) через $f(x)$ и обозначая «предварительную производную» (см. первый манускрипт) через $f^1(x)$, в отличие от окончательной «производной» $f'(x)$. Тогда, если

$$f(x)-y,$$
$$f(x_1)\quad y_1,$$
$$f(x_1)-f(x)=y_1-y \text{ или } \Delta y$$
$$f^1(x)(x_1-x)-y_1-y \text{ или } \Delta y.$$

Предварительная производная $f^1(x)$, как и ее множитель x_1-x, должна [2]) содержать выражения в x_1 и x, за единственным исключением, когда $f(x)$ есть первоначальная функция первой степени.

$$f^1(x)=\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ или } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[1]) В черновике вместо «перед нами»—«лишь».
[2]) В черновике: «должна как правило».

Полагая теперь в $f^1(x)$

$$x_1 - x, \text{ следовательно } x_1 - x = 0,$$

получим:

$$f'(x) = \frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx}$$

и окончательно: $f'(x)\,dx = dy$ или

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Диференциал от y есть таким образом конечный пункт алгебраического развития; он становится исходным пунктом движущегося на собственной почве диференциального исчисления. dy, рассматриваемое изолированно, т. е. без своего эквивалента—диференциальная частица от y (die Differentielle von y [1]), играет тут сразу ту же роль, что Δy в алгебраическом методе, а dx — диференциальная частица от x (die Differentielle von x),—ту же, что там Δx.

Если бы мы освободили $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x)$ от его знаменателя, то получили бы:

I) $$\Delta y - f^1(x)\Delta x.$$

Наоборот, исходя из диференциального исчисления как готового, обособленного исчисления, — а этот исходный пункт сам был выведен алгебраически,—мы сразу начинаем с диференциального выражения уравнения I, именно:

II) $$dy = f'(x)\,dx.$$

3) Так как символическое уравнение диференциала появляется уже при алгебраическом диференцировании самых элементарных функций с одной лишь зависимой переменной, то может казаться, что и переворот в методе мог быть развит гораздо проще, чем это произошло на примере $y = uz$.

Самые элементарные функции суть функции первой степени, именно:

a) $y = x$, что дает диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = 1$, следовательно диференциал $dy = dx$;

b) $y = x \pm ab$, что дает диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = 1$, следовательно опять диференциал $dy - dx$.

c) $y = ax$, что дает диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = a$, следовательно диференциал $dy - adx$.

Рассмотрим наипростейший случай (sub a). Тогда

$$y = x,$$
$$y_1 = x_1,$$
$$y_1 - y \text{ или } \Delta y - x_1 - x \text{ или } \Delta x.$$

[1]) Маркс различает диференциальные частицы dx и dy (die Differentiellen), представляющие собой снятые разности Δx и Δy, и диференциал (das Differential) $dy = f'(x)\,dx$, как другую форму для выражения

$$\frac{dy}{dx} \quad f'(x)$$

I) $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ или $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, следовательно также $\Delta y - \Delta x$. Если теперь в $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ положить $x_1 = x$ или $x_1 - x = 0$, то

II) $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx} = 1$; следовательно $dy - dx$.

С самого начала, как только получено I, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, мы вынуждены оперировать в дальнейшем на левой стороне уравнения, так как правая занята постоянной 1. Но тем самым, переворот в методе, переводящий инициативу с правой стороны на левую, кажется уже заранее раз навсегда доказанным, действительно первым словом самого алгебраического метода.

Присмотримся к делу поближе.

Действительный результат был:

I) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1;$$

II) $$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 1.$$

Так как оба, I и II, ведут к одному и тому же результату, мы можем выбирать межлу ними.

Во всяком случае полагание $x_1 - x = 0$ представляется излишней, а потому произвольной операцией. Кроме того, оперируя далее с уравнением II), исходя из левой его стороны, так как на правой нечего делать («nix ze wolle»), мы получим:

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Конечный результат был бы, что $\frac{0}{0} = 0$, и значит метод, с помощью которого было получено $\frac{0}{0}$, ошибочен. При первом шаге он не ведет ни к чему новому, а уже при втором приводит к ничему. Наконец, мы знаем из алгебры, что если вторые стороны двух уравнений тождественны, то и первые также должны быть тождественны. Отсюда следует, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Но так как x и зависящее от него y оба—переменные величины, то Δx, оставаясь конечной разностью, может однако бесконечно уменьшаться, другими словами, приближаться к нулю сколь угодно близко, т. е. становиться бесконечно малой, равно как и зависящее от него Δy. Далее, из $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что $\frac{dy}{dx}$ в действительности означает не экстравагантное $\frac{0}{0}$, а наоборот, есть праздничный мундир для $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, поскольку это последнее функционирует как отношение бесконечно малых разностей, т. е. иначе, чем в обыкновенном разностном исчислении (Differenzenrechnung).

Диференциал (das Differential) $dy - dx$ со своей стороны лишен всякого смысла, или, вернее, имеет лишь ровно столько смысла, сколько мы открыли в обеих диференциальных частицах (Differentiellen), анализируя $\frac{dy}{dx}$. Если бы мы взяли это последнее в только что приданном ему значении, то мы уже могли бы совершать с диференциалом ч десные операции, как это показывает например роль adx в определении подкасательной параболы; но для этого отнюдь не требуется действительное понимание природы dx и dy.

4) Прежде чем я перейду к разделу III, дающему в самом кратком виде набросок исторического хода развития диференциального исчисления, еще один пример на до сих пор применявшийся алгебраический метод. [Далее Маркс диференцирует сложную функцию, определяемую уравнениями $y = 3u^2$, $u = x^3 + ax^2$, и показывает, пользуясь соотношением $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, которое особо не доказывает (повидимому потому что считает уже обоснованным право оперировать с $\frac{dy}{dx}$ как с обыкновенной дробью), что производная сложной функции $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$ есть произведение производных $f'(u)$ и $\varphi'(x)$. Выкладки по соображениям места опускаем. Соответствующее место приведено в варианте, см. стр. 29—31.]

III. Конец этого второго выпуска последует после того, как будет просмотрен в музее Джон Ланден.

Дополнительные замечания к диференцированию произведения [1]).

При нахождении *duz* в последнем манускрипте существенным для меня было, что касается уравнения A) $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$, показать как алгебраический метод сам собой превращается в диференциальный благодаря тому, что внутри «производной», т. е. на правой стороне, появляются символические диференциальные коэфициенты, в качестве таковых становящиеся уже самостоятельными исходными пунктами и готовыми оперативными формулами.

Форма уравнения A) представилась тем более подходящей для этой цели, что она дает возможность сравнения между $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, возникающими внутри производной $f'(x)$, и $\frac{dy}{dx}$ на левой стороне, представляющим символический диференциальный коэфициент, а потому символический эквивалент для $f'(x)$.

Что касается характера $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ как оперативных формул, я ограничился указанием, что для этих диференциальных коэфициентов могут быть получены любые «производные» или реальные значения, если вместо

[1]) Заглавие принадлежит Марксу. Публикуемый отрывок представляет собой первый из трех пунктов, объединенных этим заглавием. Мы приводим его как резюмирующий вкратце основную работу о диференциале. Остальные два пункта, касающиеся деталей выкладок, опускаем.

u подставить произвольную $f(x)$, например $3x^2$, вместо z—произвольную $\psi(x)$, например x^3+ax^2.

Но я мог бы также указать и на геометрическую применимость этих оперативных формул, поскольку например общая формула для подкасательных кривых есть $y\frac{dx}{dy}$, что вполне идентично по форме с $z\frac{du}{dx}$, ибо они суть произведения некоторой переменной на символический диференциальный коэфициент.

Наконец можно было бы еще заметить, что $y=uz$ есть простейшая элементарная функция, на которой может быть развита наша тема.

Вариант работы о диференциале [1]).

Мы исходили из алгебраического вывода $f'(x)$, чтобы этим одновременно выявить ее символическое диференциальное выражение $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$ в его происхождении и вскрыть таким образом его смысл. Теперь мы должны обратно исходить из символических диференциальных коэфициентов $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ как данных формул, чтобы найти соответствующие им реальные эквиваленты $f'(x)$, $\varphi'(x)$. И притом эти различные способы трактовки диференциального исчисления, исходящие из противоположных полюсов и характеризующие две различные исторические школы, возникли здесь не из изменения нашего субъективного метода, но из природы обсуждаемой функции uz. Мы трактуем ее, как трактовали функции x с одной лишь зависимой переменной, когда исходили из полюса на правой стороне и алгебраически над ней оперировали. Я не думаю, чтобы какой-нибудь математик—на столь элементарной функции, как uz, или на какой бы то ни было другой,—выяснил или хотя бы подметил необходимость этого перехода от первого, алгебраического метода (исторически второго). Для этого они были слишком поглощены материалом исчисления.

В действительности мы находим, что в уравнении

$$\frac{0}{0}\text{ или }\frac{dy}{dx}=z\frac{du}{dx}+u\frac{dz}{dx}$$

$\frac{dy}{dx}$ совершенно так же возникло из процесса, происходившего справа с uz, как это раньше имело место для функций x с одной зависимой переменной, но, с другой стороны, в самое $f'(x)$, или первую производную от uz, в свою очередь оказались включенными диференциальные символы $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, являющиеся в силу этого элементами эквивалента для $\frac{dy}{dx}$. Таким образом сами символические диференциальные коэфициенты со своей стороны стали уже предметом или содержанием диференциальной операции, вместо того чтобы, как прежде, фигурировать лишь в качестве символического ее результата.

Наряду с этими двумя пунктами—во-первых, что символические ди-

---

[1]) Имеется только в черновике, первые четыре страницы отсутствуют.

ференциальные коэфициенты [1]) наравне с переменными, сами с своей стороны становятся содержательным элементом производной, объектами диференциальных операций, во-вторых, что переворачивается постановка вопроса и вместо отыскания символического выражения для реальных диференциальных коэфициентов ($f'(x)$) ищется реальный диференциальный коэфициент по его символическому выражению—наряду с этими двумя пунктами дан и третий. Именно, что символические диференциальные выражения появляются не как символический результат совершенных над действительными функциями x диференциальных операций, а наоборот, играют теперь роль символов, указывающих на диференциальные операции, которые лишь должны быть выполнены над реальной функцией x, т. е. что эти выражения становятся таким образом оперативными символами.

В нашем случае, где

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

мы могли бы оперировать дальше лишь, если бы мы знали не только, что u и z обе суть функции от x, но если бы, как в случае $y = x^m$, для u и z были даны действительные значения в x, например $u = \sqrt{x}$, $z = x^3 + 2ax^2$. Таким образом $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ стоят тут в действительности как указатели операций, способ выполнения которых предполагается известным для любой функции от x, которая может быть подставлена вместо u и z.

Найденное уравнение есть не только символическое оперативное уравнение, но [еще] лишь подготовительное символическое оперативное уравнение. Так как в

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

знаменатель dx находится во всех членах на обоих сторонах, то приведенное выражение этого уравнения есть:

$$\text{II)}\quad dy \text{ или } duz = zdu + udz.$$

Непосредственно это уравнение говорит, что для диференцирования произведения двух произвольных переменных (что в дальнейшем применении может быть обобщено на произведение любого числа переменных) нужно помножить каждый из двух множителей на диференциал другого и сложить полученные два произведения.

Итак, при диференцировании произведения двух переменных первое оперативное уравнение $\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$ как подготовительное становится излишним после того, как оно выполнило свое назначение — доставить общую символическую формулу диференцирования, которая прямо ведет к цели.

И здесь следует отметить, что первоначальный способ алгебраического вывода превратился в собственную противоположность. Там мы сначала

1) У Маркса описка—«символы».

получаем $\Delta y = y_1 - y$ как символ, соответствующий $f(x_1) - f(x)$, где обе [функции] суть обыкновенные алгебраические выражения либо $f(x)$ и $f(x_1)$ были даны в виде определенных алгебраических функций от x).

Далее $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ выражалось в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и затем $f'(x)$ (первая производная функция x) в виде $\frac{dy}{dx}$; и лишь из окончательного уравнения для диференциального коэфициента $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ мы получаем диференциал

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Наоборот, полученное выше уравнение доставляет нам в качестве исходных пунктов диференциалы. Именно, если мы заменим u и z какими-либо определенными действительными алгебраическими функциями от x, которые мы лишь обозначаем: $u = f(x)$ и $z = \varphi(x)$, то

$$dy = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x),$$

и эти d указывают на лишь подлежащее выполнению диференцирование.

Результат этого диференцирования имеет общую форму:

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

и

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)\,dx.$$

Таким образом

$$dy = \varphi(x) f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

наконец

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

Здесь, где диференциал играет уже роль готового оперативного символа, мы выводим следовательно диференциальные коэфициенты из него, в то время как в первоначальном алгебраическом развитии, наоборот, диференциал был получен из уравнения для диференциальных коэфициентов.

Рассмотрим самый диференциал, как мы его получили в его простейшей форме, именно из функций первой степени:

$$y = ax;$$

$$\frac{dy}{dx} = a,$$

отсюда диференциал:

$$dy = a\,dx.$$

Уравнение этих диференциалов кажется более сомнительным, чем уравнение для диференциального коэфициента $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$, из которого они выведены.

Так как $dy = 0$ и $dx = 0$, то $dy = a\,dx$ тождественно с $0 = 0$. И тем не менее мы имеем полное право употреблять dy и dx вместо исчезнувших, но зафиксированных в своем исчезновении при помощи этих символов, разностей $y_1 - y$, $x_1 - x$.

Покуда мы не идем дальше выражения

$$dy = a\,dx$$

или вообще

$$dy = f'(x)\,dx,$$

оно есть не что иное, как лишь некоторая другая запись того факта, что $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, в нашем случае $= a$, почему мы всегда имеем возможность снова превратить его в эту последнюю форму. Но уже эта способность к превращению делает его оперативным символом. Мы видим сразу, что если мы нашли как результат процессов диференцирования $dy = f'(x)\,dx$, нам нужно лишь поделить обе части на dx, чтобы найти диференциальные коэфициенты $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Так например в $y^2 = ax$

$$dy^2 = a\,dx,$$

$$2y\,dy = a\,dx.$$

Последнее уравнение в диференциалах дает нам два уравнения в диференциальных коэфициентах, именно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}.$$

Но [уравнение] $2y\,dy = a\,dx$ непосредственно дает для dx значение $\frac{2y\,dy}{a}$ и становится таким образом оперативным средством, помогающим нам, будучи подставлено например в общую формулу подкасательной $y\,\frac{dx}{dy}$, найти окончательно в качестве значения подкасательной обыкновенной параболы величину $2x$, удвоенную абсциссу.

II

Возьмем теперь пример, в котором сперва символические выражения служат готовыми оперативными формулами исчисления, и значит находится реальное значение символического диференциального коэфициента, а затем дадим противоположное элементарное алгебраическое изложение.

1) Зависимая функция y и независимая переменная x связаны не одним уравнением, а так, что y фигурирует в некотором уравнении непосредственно как функция переменной u, а u — в некотором другом уравнении непосредственно как функция переменной x. Задача: найти реальное значение символического диференциального коэфициента $\frac{dy}{dx}$.

Пусть а) $y = f(u)$, b) $u = \varphi(x)$.

Сперва 1) $y = f(u)$ дает

$$\frac{dy}{du} = \frac{df(u)}{du} = \frac{f'(u)\,du}{du} = f'(u).$$

2) $$\frac{du}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{\varphi'(x)\,dx}{dx}=\varphi'(x).$$

Следовательно:

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

Но

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}.$$

Следовательно

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

Например, если a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$, то, по формуле,

$$\frac{dy}{du}=\frac{d3u^2}{du}=6u\ (=f'(u)).$$

Но уравнение b) дает $u = x^3 + ax^2$. Вставим это значение u в $6u$ тогда:

$$\frac{dy}{du}=6(x^3+ax^2)\ (=f'(u)).$$

Далее:

$$\frac{du}{dx}=3x^2+2ax\ (=\varphi'(x)).$$

Следовательно:

$$\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\text{ или }\frac{dy}{dx}=6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax)\ (=f'(u)\cdot\varphi'(x)).$$

2) Мы берем, в качестве исходных, уравнения, содержащиеся в последнем примере, с целью продифференцировать их теперь по первому алгебраическому методу.

a) $y = 3u^2$, b) $u = x^3 + ax^2$.

Так как

$$\left.\begin{array}{l} y=3u^2,\\ y_1=3u_1^2,\end{array}\right\}\quad y_1-y=3(u_1^2-u^2)=3(u_1-u)(u_1+u),$$

отсюда

$$\frac{y_1-y}{u_1-u}=3(u_1+u).$$

Если теперь положить $u_1 - u = 0$, следовательно $u_1 = u$, то $3(u_1 + u)$ превращается в $3(u+u)=6u$.

Вставим вместо u его значение из уравнения b); тогда

$$\frac{dy}{du}=6(x^3+ax^2).$$

Далее, так как

$$u = x^3 + ax^2,\quad u_1 = x_1^3 + ax_1^2,$$

то

$$u_1 - u = (x_1^3 + ax_1^2) - (x^3 + ax^2) = (x_1^3 - x^3) + a(x_1^2 - x^2)$$
$$(x_1 - x)(x_1^2 + x_1x + x^2) + a(x_1 - x)(x_1 + x),$$

следовательно

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2 + a(x_1 + x).$$

Если теперь положить $x_1 - x = 0$, следовательно $x_1 = x$, то

$$x^2 + xx + x^2 = 3x^2$$

и

$$a(x + x) = 2ax.$$

Следовательно

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax.$$

Перемножив теперь обе функции, стоящие на правых сторонах, получим:

$$6(x^3 + ax^2)(3x^2 + 2ax),$$

чему соответствует слева

$$\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \frac{dy}{dx},$$

т. е. то же, что и прежде.

Само собой разумеется, что вследствие громоздкости, а часто и затруднительности разложения первой разности $f(x_1) - f(x)$ на такие члены, каждый из которых содержит множитель $x_1 - x_1$, последний метод в качестве вычислительного инструмента несравним с исторически ранее установившимся. Но, с другой стороны, в последнем исходят из dy, dx, $\frac{dy}{dx}$ как] данных оперативных формул, тогда как в первом видно их — и притом чисто алгебраическое — возникновение. Ничего больше я и не утверждаю. А как там, в первом [исторически] методе был получен исходный пункт для диференциальных символов как оперативных формул? При помощи явных или неявных метафизических предпосылок, которые в свою очередь ведут к метафизическим, нематематическим следствиям: появляется насильственное вычеркивание неких стоящих на пути вывода и однако из него самого возникших величин.

С целью продемонстрировать на историческом примере различие обоих исходящих из противоположных полюсов методов я сопоставлю решение изложенного выше случая *duz* Ньютоном и Лейбницем, с одной стороны, Лагранжем — с другой.

1) Ньютон.

Раньше всего нам говорят, что если переменные величины растут, то $\dot{x}$, $\dot{y}$ и т. д. обозначают скорости их течения [1]), alias соответствующего роста x, y и т. д. Но так как, далее, численные величины всех количеств могут быть представлены прямыми линиями [2]), то порождаемые моменты или бесконечно малые количества равны произведениям

[1]) У Маркса описка: «флюксий».
[2]) См. примечание на стр. 44.

скоростей x, y и т. д. на бесконечно малую частицу времени τ, в течение которого они длятся, следовательно $= \dot{u}\tau$, $\dot{x}\tau$, $\dot{y}\tau$ [1]).

Рассмотрим диференциал от y в его общей форме: $dy = f'(x)\,dx$. Здесь перед нами уже чисто символическое оперативное уравнение, даже в том случае, когда $f'(x)$ с самого начала есть постоянная, как $dy = -dax - adx$. Это дитя [диференциального коэфициента] $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ выглядит подозрительнее, чем его мать. Ибо в $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ знаменатель и числитель неразрывно связаны, в $dy = f'(x)\,dx$ они на вид разделены, так что напрашивается вывод: $dy = f'(x)\,dx$ есть лишь замаскированное выражение для $0 = f'(x) \cdot 0$, следовательно $0 = 0$, а с этим ничего не поделаешь («nichts zu wolle»). Последующие, принадлежащие нашему веку, аналитики, как например француз Бушарла, тоже чувствуют, что тут что-то неладно. Он говорит: «в $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, например $\frac{0}{0}$ alias $\frac{dy}{dx}$ или, вернее, его значение $3x^2$ есть диференциальный коэфициент функции y. Так как $\frac{dy}{dx}$ есть таким образом символ, представляющий предел (Grenze) $3x^2$, то dx должно бы всегда стоять под dy. Но для облегчения алгебраических операций мы рассматриваем $\frac{dy}{dx}$ как обыкновенную дробь, а $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ как обыкновенное уравнение, почему и получаем, освобождая уравнение от знаменателя dx, результат: $dy = 3x^2 dx$, каковое выражение называется диференциалом y».

Итак для «облегчения алгебраических операций» мы вводим неверную формулу.

В действительности дело обстоит не так. В $\frac{0}{0}$, собственно, следует писать $\left(\frac{0}{0}\right)$ отношение минимального выражения для $y_1 - y$ или $f(x_1) - f(x)$ или приращения $f(x)$ к минимальному выражению для $x_1 - x$ или приращения независимой переменной x, обладает формой, в которой числитель неотделим от знаменателя. Но почему? Чтобы сохранить $\frac{0}{0}$ как отношение исчезнувших разностей. Но как только $x_1 - x = 0$ получает в dx форму, которая манифестирует его как исчезнувшую разность x, и следовательно $y_1 - y = 0$ также появляется в виде dy, — отделение числителя от знаменателя становится вполне допустимой операцией. Где бы теперь ни находилось dx, его связь с dy не затрагивается такой переменой места. $dy = df(x)$, следовательно $= f'(x)\,dx$ есть лишь другое выражение для $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, которое должно выступать в конце, чтобы $f'(x)$ могло быть получено как самостоятельное выражение. Насколько

---

[1]) Тут текст прерывается повидимому потому, что, как видно из дальнейшего (см. стр. 34), Маркс решил посвятить обсуждению исторического хода развития отдельную (IV) часть этой работы. Пока же Маркс вновь обращается к диференциалу.

[illegible]

[illegible]

(HJ 8)

I) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u$

II) $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = u$ — I) und II) [illegible] selben Resultat führen, [illegible] anders, [illegible] erscheint das [illegible] $= 0$ als eine [illegible] willkürliche Operation [illegible] auf [illegible], [illegible].

$\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx} = 0$. — Die [illegible] folgerung [illegible], dass $\frac{0}{0} = 0$, also die Methode, wodurch $\frac{0}{0}$ erhalten wurde, irrig. [illegible] [illegible] Wirklich: [illegible] aus der Algebra, dass [illegible] 2 Gleichungen [illegible], [illegible] die [illegible] Schlußsätze, dass:

$\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ — Da aber [illegible] beide unendlich grösser sind, [illegible] Δx, [illegible] Differenz [illegible], [illegible] auf 0 [illegible], so [illegible] will, also unendlich klein werden, daher auch das [illegible] abhängige Δy. Da ferner $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, so folgt daraus dass $\frac{dy}{dx}$ wirklich nicht das [illegible] $\frac{0}{0}$ [illegible], [illegible] die [illegible] form von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, welche dies als Verhältniss unendlich kleiner Differenzen functionirt, als [illegible] in der gewöhnlichen Differenzialrechnung.

Das Differential dy = [illegible] der Linie, oder [illegible] gerade um so viel [illegible] für die beiden Differentiale in der Analyse von $\frac{dy}{dx}$ entwickeln. [illegible] [illegible] Darlegung, so könnten [illegible] mit dem Differential [illegible] Operationen verrichten [illegible] $\frac{28}{[illegible]}$ Rolle [illegible]

однако эта формула $dy = f'(x)\,dx$ становится тотчас же полезной в качестве оперативной формулы, показывает пример

$$y^2 = ax,$$

$$dy^2 = adx;\quad 2ydy = adx,$$

следовательно

$$dx = \frac{2ydy}{a}.$$

Вставив значение для dx в общую формулу подкасательной $y\frac{dx}{dy}$, получим:

$$y\frac{\frac{2ydy}{a}}{dy} = \frac{2y^2dy}{ady} = \frac{2y^2}{a},$$

но так как $y^2 = ax$,

$$\frac{2y^2}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x.$$

Таким образом $2x$, т. е. удвоенная абсцисса обыкновенной параболы, есть значение ее подкасательной. Однако, если рассматривать $dy = f'(x)\,dx$ в качестве первого исходного пункта, откуда лишь в дальнейшем выводится $\frac{dy}{dx}$, то для того, чтобы этот диференциал (das Differential) от y имел какой-нибудь смысл, диференциальные частицы (die Differentiellen) dy, dx должны быть заранее предположены как символы, имеющие определенный смысл.

Если бы подобные предположения проистекли не из математической метафизики, а были бы выведены непосредственно, скажем, из функций первой степени, как $y = ax$, то, как мы видели ранее это приводит к $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$, что превращается в $\frac{dy}{dx} = a$. Но и отсюда a priori нельзя извлечь ничего определенного. Ибо так как $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ точно так же $= a$, как и $\frac{dy}{dx} = a$, а Δx и Δy всегда остаются конечными разностями или приращениями, но конечными разностями или приращениями с неограниченной способностью к убыванию, то dx, dy с одинаковым успехом можно представлять себе и как бесконечно малые, могущие неограниченно приближаться к нулю величины, и как возникшие в результате действительного приравнивания нулю $x_1 - x$, следовательно и $y_1 - y$. В обоих случаях на правой стороне получается одинаковый результат. На этой стороне нет ни x_1, ни x, значит никакого полагания $x_1 - x$, а следовательно и $x_1 - x = 0$. Это полагание = нулю на другой стороне явилось бы поэтому столь же произвольной гипотезой, как и предположение, что dx, dy суть бесконечно малые величины. Я покажу sub IV вкратце, на примере $du:z$, исторический ход развития. Прежде однако sub III [1]), дадим еще один пример, который сначала будет разобран на почве символического исчисления при помощи некоторой готовой оперативной формулы, а затем будет представлен алгебраически. Итак

[1]) Разделы III и IV отсутствуют.

sub II [1]) обнаружилось, что последний метод сам, при применении к столь элементарной функции, как произведение двух переменных, своими собственными результатами необходимо доставляет исходный пункт для метода, оперирующего исходя из противоположного полюса.

Ad. IV.

Наконец стоит еще (следуя Лагранжу) заметить, что [категории] предела (Grenze) или предельного значения (Grenzwert), которые встречаются уже иногда вместо диференциального коэфициента у Ньютона и выведены им еще из чисто геометрических представлений, еще и до сих пор неизменно играют выдающуюся роль, фигурируют ли символические выражения как предел для $f'(x)$, или, наоборот, $f'(x)$ как предел символа, или же оба фигурируют в качестве пределов. Эта категория, которою особенно широко аналитически пользовался Лакруа, становится важной как замена для категории «минимальное выражение» — либо для производной в противоположность «предварительной производной», либо для отношения $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, лишь поскольку идет речь о приложениях исчисления к кривым. Ее легче представить геометрически, и она поэтому встречается уже и у древних геометров. У некоторых современных предел скрыт еще в том, что диференциальные частицы (die Differentiellen) и диференциальные коэфициенты выражают лишь приближенные значения.

Первоначальный набросок работы о диференциале

Пусть нужно продиференцировать $f(x)$ или $y = uz$, где u и z переменные, зависящие от x. Тогда

$$y_1 = u_1 z_1$$

и

$$y_1 - y = u_1 z_1 - uz,$$

следовательно

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x},$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x}.$$

Но

$$u_1 z_1 - uz = z_1(u_1 - u) + u(z_1 - z).$$

Итак

$$\frac{u_1 z_1 - uz}{x_1 - x} = z_1 \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + u \frac{z_1 - z}{x_1 - x}.$$

Если на второй стороне $x_1 - x$ становится 0 или $x_1 = x$, то $u_1 - u = 0$, т. е. $u_1 = u$ и $z_1 - z = 0$, т. е. $z_1 = z$.

Поэтому мы получаем:

$$\frac{dy}{dx} = z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}$$

и следовательно

$$duz \text{ или } dy = zdu + udz.$$

[1]) Вероятно имеется в виду раздел I.

Необходимо заметить относительно этого диференцирования uz, в отличие от всех ранее рассмотренных случаев, где мы имели лишь одну зависимую переменную, что здесь диференциальные символы находятся сразу на обоих сторонах уравнения, именно: в первой инстанции:

$$\frac{dy}{dx} = z\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dz}{dx},$$

во второй:

$$duz \text{ или } dy - zdu + udz.$$

Последнее тоже имеет форму, отличную от формы диференциала в случае одной независимой [1]) переменной, как например $dy = f'(x)dx$, ибо здесь деление на dx дает нам сразу $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, т. е. свободное от символического коэфициента частное значение произведенной (abgeleitete) из функции x [из $f'(x)$], что никак не имеет места в $dy - zdu + udz$.

Для функций с одной лишь зависимой переменной раз навсегда показано, как [2]) из некоторой функции x, например $f(x) - x^m$, производится некоторая вторая функция x, $f'(x)$, или в данном случае mx^{m-1}, посредством действительного диференцирования и его последующего снятия, и как из этого же процесса возникает одновременно на левой стороне уравнения для производной функции $f'(x)$ символический эквивалент $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$.

Далее, полагание $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$ было здесь не только допустимо, но математически необходимо, ибо $\frac{0}{0}$ в его собственной, первобытной форме может иметь любое значение, так как $\frac{0}{0} = X$ постоянно должно давать $0 = 0$. Но в рассматриваемом случае $\frac{0}{0}$ появляется как символический эквивалент некоторого вполне определенного реального значения, например mx^{m-1}, и есть само лишь результат операций, при помощи которых это значение произведено из x^m. Как такой результат оно и закрепляется в форме $\frac{dy}{dx}$.

Здесь следовательно, где $\frac{dy}{dx}\left(= \frac{0}{0}\right)$ показано в его происхождении, $f'(x)$ ни в коем случае не получается через посредство символа $\frac{dy}{dx}$, но наоборот, это диференциальное выражение $\frac{dy}{dx}$ найдено как символический эквивалент уже произведенной функции x. Но как только этот результат однажды получен, мы можем поступать обратно.

Пусть нужно продиференцировать $f(x)$, например x^m. Тогда мы сперва ищем значение dy и находим $dy = mx^{m-1}dx$, следовательно $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$.

---

[1]) Описка; должно быть: «зависимой».

[2]) Слова «раз навсегда показано как» пропущены Марксом при переписке с имеющегося варианта этой страницы.

Здесь символическое выражение фигурирует как исходный пункт, и мы действуем, находясь уже на почве диференциального исчисления. Это значит, $\frac{dy}{dx}$ и т. д. служат уже в качестве формул, указывающих на известные нам диференциальные операции, которые нужно произвести над $f(x)$. В первом случае $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{0}{0}\right)$ получается как символический эквивалент $f'(x)$, во втором $f'(x)$ ищется и получается как реальное значение символов $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. Но если эти символы служат уже оперативными формулами диференциального исчисления, то как таковые они могут появиться также и на правой стороне уравнения, как это имело уже место в простейшем случае $dy = f'(x)dx$. Если подобное уравнение в его окончательной форме не может быть, как в простейшем случае, тотчас сведено к $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ и т. д., т. е. к некоторому реальному значению, то это означает, что данное уравнение лишь символически выражает, какие операции нужно выполнить, когда место неопределенных [знаков функций] займут определенные функции. Простейшим случаем, где это имеет место, является duz, где u и z переменные, но обе одновременно функции одной и той же третьей переменной, например x. Если процесс диференцирования сразу же приводит нас к

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx},$$

то не следует забывать, что u и z здесь обе зависящие от x переменные, как и y, который лишь постольку зависит от u и z, поскольку от x. В случаях с одной зависимой переменной последняя находилась на символической стороне. Теперь же мы имеем на правой стороне две переменные u и z, независимые от y, но зависящие от x, и их характер переменных, зависящих от x, выступает в соответствующих им символических коэфициентах $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$. Если зависимые переменные выступают и на правой стороне, то на этой стороне необходимо должны поэтому выступить также и символические диференциальные коэфициенты.

Из уравнения

$$\frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}$$

следует:

$$duz \text{ или } dy = zdu + udz.$$

Но это уравнение лишь указывает на операции, которые нужно выполнить, как только u и z даны как определенные функции от x.

Простейший случай был бы например:

$$u = ax,$$
$$z = bx,$$

тогда

$$duz \text{ или } dy = bx\,adx + ax\,b\,dx.$$

Разделив обе части на dx, получим

$$\frac{dy}{dx} = abx + bax - 2abx$$

и

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ab + ba - 2ab.$$

Возьмем теперь с самого начала произведение

$$y \text{ или } uz = ax\,bx = abx^2;$$

тогда

$$uz \text{ или } y = abx^2, \frac{dy}{dx} = 2abx, \frac{d^2y}{dx^2} = 2ab.$$

Как только получена формула, подобная например $z\frac{du}{dx}$, ясно, что это уравнение, которое можно назвать общим оперативным уравнением, есть символическое выражение подлежащих выполнению дифференциальных операций. Возьмем например выражение $y\frac{dx}{dy}$, где y ордината, а x — абсцисса. Это — общее символическое выражение подкасательной любой кривой (совершенно так же, как $duz = zdu + udz$ есть общее символическое выражение для дифференцирования произведения любых двух переменных, зависящих от одной и той же третьей). Но покуда мы оставляем это выражение таким, как оно есть, оно нам ничего не дает, хотя мы и представляем себе наглядно, что dx есть дифференциал абсциссы, а dy — дифференциал ординаты.

Какой бы то ни было положительный результат может быть получен лишь, если взять уравнение некоторой определенной кривой, которое давало бы нам определенное значение для y в его выражении через x, а следовательно также и для dy через dx, как например уравнение обыкновенной параболы: $y^2 = ax$. Дифференцируя последнее, получим $2ydy = adx$, следовательно $dx = \frac{2ydy}{a}$; подставив это определенное значение для dx в общую формулу подкасательной $y\frac{dx}{dy}$, получим

$$y\frac{\frac{2ydy}{a}}{dy} = \frac{y \cdot 2ydy}{ady} = \frac{2y^2}{a},$$

что, так как $y^2 = ax$,

$$\frac{2ax}{a} = 2x.$$

Это и есть значение подкасательной обыкновенной параболы. Она равна таким образом удвоенной абсциссе.

Но если мы обозначим подкасательную через τ, то общее уравнение $y\frac{dx}{dy} = \tau$ дает лишь $ydx = \tau dy$.

Таким образом с точки зрения дифференциального исчисления вопрос должен быть поставлен так (за исключением Лагранжа): найти реальное значение для $\frac{dy}{dx}$.

Может показаться, что если подставить вместо $\frac{dy}{dx}$ и т. д. их первоначальную форму $\frac{0}{0}$, обнаруживается трудность: тогда

$$\frac{dy}{dx} = z\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

примет вид:

$$\frac{0}{0} = z\,\frac{0}{0} + u\,\frac{0}{0}$$

— уравнение правильное, но ни к чему не ведущее, тем более, что эти три $\frac{0}{0}$ возникли из различных диференциальных коэфициентов, от различия в происхождении которых больше ничего не осталось. Однако следует учесть:

1) Уже при первом изложении, в случае одной независимой [1]) переменной мы получили сперва $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, следовательно $dy = f'(x)\,dx$. Но так как $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, $dy = 0$ и $dx = 0$, следовательно $0 = 0$. Заменяя обратно $\frac{dy}{dx}$ его неопределенным выражением $\frac{0}{0}$, мы совершаем здесь однако положительную ошибку, ибо $\frac{0}{0}$ найдено тут лишь как символический эквивалент реального значения $f'(x)$ и как таковой закреплено в выражении $\frac{dy}{dx}$, следовательно также в $dy = f'(x)\,dx$.

2) $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ становится $\frac{du}{dx}$ или $\frac{0}{0}$ вследствие того, что переменная x_1 становится равной x или $x_1 - x = 0$; таким образом мы сразу получаем для $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$ не 0, а $\frac{0}{0}$. Но мы знаем вообще, что $\frac{0}{0}$ может иметь любое значение и что в определенных случаях оно имеет частное значение, получающееся, если вставить вместо u некоторую определенную функцию от x; значит мы не только имеем право заменить $\frac{0}{0}$ через $\frac{du}{dx}$, но должны это сделать, ибо как $\frac{du}{dx}$, так и $\frac{dz}{dx}$ фигурируют в данном случае лишь как символы подлежащих выполнению диференциальных операций. Покуда мы не идем дальше результата:

$$\frac{dy}{dx} = z\,\frac{du}{dx} + u\,\frac{dz}{dx}, \text{ следовательно } dy = z\,du + u\,dz,$$

выражения $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, du, dz остаются столь же неопределенными, как и могущее принимать любое значение $\frac{0}{0}$.

3) Даже в обыкновенной алгебре $\frac{0}{0}$ может появиться как форма для выражений, имеющих некоторое реальное значение, именно потому, что $\frac{0}{0}$ может быть символом любой величины. Пусть например дано $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$. Положим, $x = a$, тогда $x - a = 0$ и $x^2 = a^2$, поэтому $x^2 - a^2$ 0. Мы

[1]) Описка; должно быть: «зависимой».

получим следовательно: $\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{0}{0}$, до сих пор правильный результат, отнюдь однако не доказывающий, на том основании, что $\frac{0}{0}$ может иметь любое значение, будто $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ не имеет никакого реального значения. Разложим x^2-a^2 на множители, тогда $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, следовательно $\frac{x^2-a^2}{x-a}=(x+a)\frac{x-a}{x-a}=x+a$; следовательно, если $x-a=0$, то $x-a$ и поэтому $x+a=a+a-2a$.

Если бы в обыкновенном алгебраическом уравнении имелся член вида $P(x-a)$, то при $x-a$, т. е. $x-a=0$, необходимо $P(x-a)=P\cdot 0=0$; при тех же предположениях равно нулю и $P(x^2-a^2)$. Разложение x^2-a^2 на множители ничего бы при этом не изменило, ибо $P(x+a)(x-a)=P(x+a)\cdot 0=0$.

Отсюда однако отнюдь не следует, что если при полагании $x=a$ получается член вида $P\cdot\left(\frac{0}{0}\right)$, то его значение необходимо равно нулю. $\frac{0}{0}$ может иметь любое значение, ибо $\frac{0}{0}=X$ всегда дает $0=X.0=0$; но именно потому, что $\frac{0}{0}$ может иметь любое значение, оно не должно быть необходимо равным нулю, и если нам известно его происхождение, то, коль скоро за ним скрывается некоторое реальное значение, последнее также может быть найдено. Так например, если $x-a$, $x-a=0$ и следовательно также $x^2=a^2$, $x^2-a^2=0$, $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}=P\cdot\frac{0}{0}$. Хотя этот результат получен математически вполне правильно, было бы однако математически не менее ложно принять без дальнейшего, что $P\cdot\frac{0}{0}=0$, ибо это предположение включало бы необходимость равенства нулю выражения $\frac{0}{0}$. а следовательно и [равенства] $P\cdot\frac{0}{0}=P\cdot 0$. Напротив, следовало бы исследовать, не получится ли другой результат при разложении x^2-a^2 на его множители $(x-a)(x+a)$; действительно, это разложение превращает выражение $P\cdot\frac{x^2-a^2}{x-a}$ в $P\cdot(x+a)\frac{x-a}{x-a}=P\cdot(x+a)\cdot 1$, и так как $x-a$, — в $P.2a$ или в $2Pa$. Тем более, как только мы имеем дело с переменными, закрепление происхождения $\frac{0}{0}$ при помощи дифференциальных символов $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ не только оправдано, но и положительно необходимо, после того как мы первоначально доказали, что они возникают в качестве символических эквивалентов производных функций от переменных величин, продолавших определенные процессы диференцирования. Если таким образом $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ представляют собой первоначально результат подобных процессов диференцирования, то именно поэтому они могут, наоборот, стать символами процессов, которым лишь должны еще подвергнуться переменные, т. е. оперативными символами, фигурирующими уже не как результат, а как исходный пункт. И в этом их существенная роль в диференциальном исчислении. В качестве подобных оперативных символов они сами могут стать содержа-

нием уравнений между различными переменными. (В неявных функциях на правой стороне с самого начала стоит 0, а все зависимые и независимые переменные с их коэфициентами находятся на левой.)

Так [и обстоит дело] в уравнении, которое мы получили:

$$\frac{duz}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Если отвлечься от ранее сказанного, зависящие от x функции u и z появляются здесь сами неизмененными снова как u и z, но каждая из них снабжена в качестве множителя символическим диференциальным коэфициентом другой. Это уравнение имеет следовательно значение лишь некоторого общего уравнения, указывающего посредством символов, какие операции нужно выполнить, когда u и z даны соответственно как зависимые переменные двумя определенными функциями от x. Лишь для определенных функций u и z выражения $\frac{du}{dx} = \frac{0}{0}$ и[1]) $\frac{dz}{dx} = \frac{0}{0}$ и следовательно также $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ могут равняться 0, т. е. значение $\frac{0}{0} = 0$ не может быть заранее предположено, а должно само явиться следствием определенных уравнений, выражающих функциональную зависимость.

Если например $u = x^3 + ax^2$, то

$$\left(\frac{0}{0}\right) = \frac{du}{dx} = 3x^2 + 2ax,$$
$$\left(\frac{0}{0}\right)^1 = \frac{d^2u}{dx^2} = 6x + 2a,$$
$$\left(\frac{0}{0}\right)^2 = \frac{d^3u}{dx^3} = 6,$$
$$\left(\frac{0}{0}\right)^3 = \frac{d^4u}{dx^4} = 0,$$

т. е. в этом случае $\frac{0}{0} = 0$.

Краткий смысл всей этой длинной истории состоит в том, что мы здесь посредством самого диференцирования получаем диференциальные коэфициенты в их символической форме как результат, как значения диференциального уравнения, именно в уравнении:

$$\frac{duz}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}.$$

Но мы знаем, что $u =$ определенной функции от x, например $f(x)$. Поэтому $\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$, в его диференциальном символе $\frac{du}{dx} = f'(x)$, т. е. первой производной функции от $f(x)$.

Точно так же $z = \varphi(x)$ например, откуда равным образом $\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$, первой производной функции от $\varphi(x)$. Но само первоначальное уравнение не дает нам ни u, ни z в виде каких-нибудь определенных функций

[1]) В рукописи описка: «или».

от x, как например $u \quad x^m, z - \sqrt{x}$. Оно дает u и z лишь как общие выражения для любых двух функций от x, произведение которых нужно диференцировать.

Уравнение это указывает, что если требуется продиференцировать произведение каких-нибудь двух функций от x, представленное в виде uz, то нужно сперва найти реальное значение символического диференциального коэфициента $\frac{du}{dx}$, т. е. первую производную функцию, скажем, от $f(x)$, и помножить это значение на $\varphi(x) = z$, затем найти таким же, образом реальное значение $\frac{dz}{dx}$ и помножить его на $f(x) \quad u$; наконец сложить полученные произведения. Операции диференциального исчисления предполагаются здесь уже известными. Таким образом данное уравнение есть лишь символическое указание подлежащих выполнению операций, а символические диференциальные коэфициенты $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ становятся тут вместе с тем указателями диференциальных операций, которые нужно лишь выполнить в каждом конкретном случае, в то время как первоначально они сами были произведены как символические формулы уже совершенных диференциальных операций.

Как только они приняли такой характер, они сами могут стать содержанием диференциальных уравнений, как например в теореме Тэйлора:

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx} h + \text{etc.}$$

Но это тогда суть также лишь общие символические оперативные уравнения. В диференцировании uz интересно поэтому то, что это — простейший случай, в котором, в отличие от случаев, где входит лишь одна зависящая от независимой переменной x переменная y, при применении самого первоначального метода диференциальные символы появляются также и на правой стороне уравнения (на стороне его развернутого выражения), почему и выступают как диференциальные символы и как таковые сами становятся содержанием уравнения.

Эта роль, в которой они выступают как указатели подлежаших выполнению операций и поэтому служат исходным пунктом, есть присущая им роль в действующем уже на собственной почве диференциальном исчислении. Но не подлежит сомнению, что этот переворот, это обращение ролей не было замечено никем из математиков, и тем более не была доказана необходимость его па каком-либо совсем элементарном диференциальном уравнении. Упоминается лишь как факт, что в то время как изобретатели диференциального исчисления и большинство их последователей делают диференциальные символы исходным пунктом исчисления, Лагранж, наоборот, берег за исходный пункт алгебраическое получение (die algebraische Ableitung) действительных функций независимых переменных, а диференциальные символы делает простыми символическими выражениями уже произведенных функций.

Возвратимся еще раз к duz. Сперва в результате полагания $x_1 - x = 0$ в качестве продукта самой диференциальной операции мы получаем:

$$\frac{dy}{dx} - z \frac{du}{dx} + u \frac{dz}{dx}.$$

Так как знаменатели тут одинаковые, то мы получаем в качестве приведенного выражения

$$dy = z\,du + u\,dz.$$

Это соответствует тому, что в случае одной лишь зависимой переменной мы получили в качестве символического выражения для производной функции от x, т. е. для $f'(x)$ (например для max^{m-1}, которое есть $f'(x)$, если $f(x) = ax^m$) на левой стороне $\frac{dy}{dx}$ как ее символическое выражение:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

и лишь как результат отсюда

$$dy = f'(x)\,dx$$

(например $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$: $dy = max^{m-1}\,dx$, что и есть диференциал функции y) (последний мы можем сразу же превратить обратно в $\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$). Но случай $dy = z\,du + u\,dz$ отличается еще тем, что диференциалы du, dz стоят здесь на правой стороне как оперативные символы и что лишь после выполнения операций, указанных ими, определяется dy. Если

$$u = f(x),$$
$$z = \varphi(x),$$

то мы знаем, что

$$du = f'(x)\,dx,$$

а

$$dz = \varphi'(x)\,dx.$$

Следовательно

$$dy = \varphi(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x).$$

В первом случае таким образом сначала получен диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, а затем диференциал $dy = f'(x)\,dx$. Во втором — сначала диференциал dy, а затем диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx}$. В первом случае, где сами диференциальные символы лишь возникают из совершаемых над $f(x)$ операций, нужно сперва найти производную функцию, — действительный диференциальный коэфициент, — чтобы навстречу ей выступило $\frac{dy}{dx}$ как ее символическое выражение, и лишь после того как она найдена, может быть выведен диференциал $dy = f'(x)\,dx$.

Наоборот, в $dy = z\,du + u\,dz$, так как du, dz фигурируют здесь как оперативные символы и притом указывающие на такие операции, выполнению которых мы уже научились в диференциальном исчислении, то для нахождения реального значения $\frac{dy}{dx}$ мы должны сначала в каждом конкретном случае заменить u и z их значениями в x, чтобы найти

$dy=\varphi(x)f'(x)dx+f(x)\varphi'(x)dx$; и лишь дальнейшее деление на dx дает нам реальное значение для $\frac{dy}{dx}=\varphi(x)f'(x)+f(x)\varphi'(x)$.

То же, что для $\frac{du}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д., имеет место и для всех более сложных формул, где сами дифференциальные символы появляются как содержание общих символических оперативных уравнений.

III
ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

B (продолжение к A)[1])

1) Ньютон, род. 1642 †1727. «Математические принципы натуральной философии», опубликовано в 1687 г.
   Кн. I, Лемма XI. Схолия.
   Кн. II, Лемма II после Предложения VII.
   «Анализ посредством рядов количеств, флюксий etc.»[2]), написано в 1665 г., опубликовано в 1711 г.
2) Лейбниц.
3) Тэйлор (Брук), род. 1685 †1731, опубликовал в 1715—1717 гг. «Метод приращений etc.».
4) Маклорен (Колин), род. 1698 †1746.

| 5) Джон Ланден |

6) Д'Аламбер, род. 1717 †1783. «Трактат о жидкостях», 1744.
7) Эйлер (Леонард), род. 1707 †1783. «Введение в анализ бесконечных», Лозанна, 1748.
   «Основы дифференциального исчисления», 1755 (ч. 1, гл. III).
8) Лагранж, род. 1736. «Теория аналитических функций» (1797 и 1813). (См. Введение.)
9) Пуассон (Денис, Симеон), род. 1781 †1840.
10) Лаплас (П. Симон, маркиз де-), род. 1749 †1827.
11) Муаньо. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению.

Ньютон, род. 1642 †1727 (85 лет) «Математические принципы натуральной философии» (впервые опубликовано в 1687 г.). См. Лемма I и Лемма XI (Схолия).
Затем особенно «Анализ посредс вом рядов количеств, флюксий etc.», впервые опубликовано в 1711 г., но написано в 1665 г. тогда как Лейбниц пришел к тому же открытию лишь в 1676 г.
Лейбниц, род. 1646 †1716 (70 лет).
Лагранж, род. 1736 † лишь при империи (Наполеон I), изобретатель

---

[1]) Отдельный листок в начале тетради.
[2]) Полное название: «Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias: cum enumeratione linearum tertii or inis». Впоследствии названа Ньютоном «De analysi per aequationes numero terminorum infinitas».

вариационного исчисления. «Теория аналитических функций» (1797 и 1813 гг.).

Д'Аламбер, род. 1717 † 1783 (66 лет). «Трактат о жидкостях» 1744 г.

1) Ньютон. Скорости флюксий[1]), например переменных x, y, etc обозначает через $\dot{x}$, $\dot{y}$, etc. Если например u и x взаимосвязанные величины (флюенты), производимые непрерывным движением, то $\dot{u}$ и $\dot{x}$ обозначают скорости их возрастания и следовательно $\frac{\dot{u}}{\dot{x}}$ — отношение между скоростями, с которыми производятся их приращения.

Так как числовые величины всех возможных количеств можно представить прямыми линиями, то моменты или бесконечно малые порции производимых количеств = произведениям их скоростей на бесконечно малые промежутки времени, в течение которых эти скорости длятся[2]), так что если обозначить бесконечно малый промежуток времени через τ, то моменты x и y представятся соответственно через $\tau\dot{x}$ и $\tau\dot{y}$.

Например $y = uz$; если обозначить скорости возрастания величин u, z, y соответственно через $\dot{u}, \dot{z}, \dot{y}$, то моменты их будут $\tau\dot{u}$, $\tau\dot{z}$, $\tau\dot{y}$, и мы получаем:

$$y = uz,$$

$$y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}) = uz + u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z},$$

откуда

$$\tau\dot{y} = u\tau\dot{z} + z\tau\dot{u} + \tau^2\dot{u}\dot{z}.$$

Так как τ бесконечно мало, то оно исчезает само по себе, и тем более совершенно исчезает $\tau^2\dot{u}\dot{z}$, как произведение, возникающее в течение не бесконечно малого промежутка времени τ, а его второй степени. (Если например $\tau = \frac{1}{\text{миллионной}}$, то $\tau^2 = \frac{1}{1\text{ млн.} \times 1\text{ млн.}}$).

Итак получаем:

$$y = u\dot{z} + z\dot{u},$$

т. е. флюксия от $y = uz$ есть $u\dot{z} + z\dot{u}$.

2) Лейбниц. Пусть требуется найти диференциал от uz. u превращается в $u + du$, z в $z + dz$; стало быть

$$uz + duz = (u + du)(z + dz) = uz + udz + zdu + dudz.$$

---

[1]) Описка; должно быть: «флюент».

[2]) Это заключение (по Ньютону) требует пояснения.

«Так как числовые величины всех возможных количеств могут быть представлены прямыми линиями», то изменение всякой величины может быть представлено в виде прямолинейного движения с переменной скоростью. А так как в течение бесконечно малого промежутка времени скорость движения можно считать неизменной, то соответствующий этому промежутку времени путь, пройденный точкой (а значит и соответственное изменение нашей величины), равен произведению этой скорости (флюксии) на (бесконечно малый) промежуток времени τ. Поэтому «моменты или бесконечно малые порции производимых количеств равны произведениям их скоростей на бесконечно малые промежутки времени».

Если мы вычтем отсюда данную величину uz, то останется как наращение $udz + zdu + dudz$. Но $dudz$, произведение одной бесконечно малой du на другую бесконечно малую dz, есть бесконечно малая второго порядка и исчезает по сравнению с бесконечно малой первого порядка $udz + zdu$. Поэтому

$$duz = udz + zdu.$$

[3] Д'Аламбер ставит в общем виде задачу так. Пусть

$$y = f(x),$$
$$y_1 = f(x + h);$$

определить, какое значение принимает $\frac{y_1 - y}{h}$, когда h обращается в нуль, т. е. определить значение $\frac{0}{0}$.

Ньютон и Лейбниц, как и большинство их последователей, действовали с самого начала на почве дифференциального исчисления; поэтому дифференциальные выражения с самого начала служили в качестве оперативных формул для нахождения затем реальных эквивалентов. В этом вся штука. Если независимая переменная x превращается в x_1, то зависимая переменная превращается в y_1. Но $x_1 - x$ необходимо равно какой-нибудь разности, = например h; это содержится в самом понятии переменной. Однако из этого ни в коем случае не следует, что эта разность = dx является исчезающей, т. е. в действительности = 0. Она может представлять собой также и действительную разность. Но если мы с самого начала предположим, что x при возрастании превращается в $x + \dot{x}$ (τ у Ньютона не играет никакой роли в его анализе основных функций и может быть поэтому опущено) или, вместе с Лейбницем, в $x + dx$, то дифференциальные выражения сразу становятся оперативными символами без того, чтобы было обнаружено их алгебраическое происхождение.

Ad Ньютон.

Возьмем ньютоновское уравнение для дифференцирования произведения uz:

$$y = uz,$$
$$y + \tau\dot{y} = (u + \tau\dot{u})(z + \tau\dot{z}).$$

Отбросим τ, как он это и сам, если угодно, делает, развивши первое дифференциальное уравнение; тогда мы получим:

$$y + \dot{y} = (u + \dot{u})(z + \dot{z}) = uz + u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z}$$

и

$$y + \dot{y} = uz = u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z},$$

следовательно, так как $uz = y$:

$$\dot{y} = u\dot{z} + z\dot{u} + \dot{u}\dot{z},$$

и чтобы получить правильный результат нужно зачеркнуть $\dot{u}\dot{z}$.

Но откуда возник этот подлежащий насильственному уничтожению член $\dot{u}\dot{z}$? Очень просто: оттого, что дифференциалы от y, u и z были введены с самого начала по определению как самостоятельные, отделенные от переменных величин, из которых они возникли, существования, а не выведены каким-либо математическим путем.

С одной стороны, видно, какую пользу приносит это предпосылаемое существование dy, dx или $\dot{y}$, $\dot{x}$; при возрастании переменных надлежит лишь подставить вместо них в алгебраическую функции биномы $y+\dot{y}$, $x+\dot{x}$ и т. д. и затем маневрировать с ними как с обыкновенными алгебраическими величинами.

Например имея $y-ax$, я получаю:

$$y+\dot{y} \quad ax+a\dot{x},$$

стало быть

$$y-ax+\dot{y} \quad a\dot{x}$$

и значит

$$\dot{y} \quad a\dot{x}.$$

Тем самым я сразу получил результат: дифференциал зависимой переменной равен наращению на ax, именно $a\dot{x}$ = произведенной из ax реальной величине a (что последняя является здесь постоянной, это — случайность, ничего не меняющая в общности результата и вызываемая лишь тем обстоятельством, что переменная x находится в первой степени), [помноженной на дифференциал независимой переменной].

Я хочу обобщить этот результат. Я знаю, что $y=f(x)$, ибо это и означает что y — переменная, зависящая от x. Если я назову произведенную из $f(x)$ величину, т. е. реальный элемент наращения, через $f'(x)$, то общий результат будет:

$$\dot{y}=f'(x)\cdot\dot{x}.$$

Таким образом я знаю уже с самого начала, что эквивалент дифференциала зависимой переменной y равен первой производной функции независимой переменной, помноженной на ее дифференциал, т. е. на dx или $\dot{x}$.

Таким образом в общем виде если

$$y=f(x),$$

то

$$dy \quad f'(x)\,dx$$

или $y=$ реальному коэфициенту [как функции] в x (ln x) (за исключением случая, где появляется постоянная, вследствие того, что x входит в первой степени), помноженному на $\dot{x}$.

Но $v \quad ax$ дает мне сразу $\frac{v'}{\cdot}$ или вообще

$$\frac{v'}{\cdot} \quad f'(\cdot)$$

Таким образом я нашёл две развиваемые в дальнейшем оперативные формулы для диференциала и диференциальных коэфициентов, образующие базис всего диференциального исчисления.

И кроме того, вообще говоря, при a priori предположенных dx, dy, etc. или $\dot{x}$, $\dot{y}$ etc, как самостоятельных изолированных приращениях x и y, я получаю огромное преимущество, отличающее диференциальное исчисление и состоящее в том, что все функции переменных с самого начала представляются в диференциальной форме.

Развив этим путем основные функции переменных, как ax, $ax \pm b$, xy, $\frac{x}{y}$, x^n, a^x, $\log x$, равно как элементарные круговые функции, я могу в дальнейшем при нахождении dy, $\frac{dy}{dx}$ пользоваться ими совершенно так, как таблицей умножения в арифметике.

И однако если мы посмотрим на оборотную сторону дела, то сразу обнаружим, что вся первоначальная операция математически неправильна.

Возьмем совсем простой пример: $y = x^2$.

Когда x возрастает, то оно получает некоторое неопределенное наращение h, вследствие чего и зависящая от него переменная y получает некоторое неопределенное наращение k. Тогда

$$y + k = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2,$$

— формула, которая дана нам Биномом. Отсюда

$$y + k - x^2 \text{ или } y + k - y = 2hx + h^2,$$

т. е.

$$(y + k) - y \text{ или } k = 2hx + h^2.$$

Деля обе части на h, мы получим

$$\frac{k}{h} = 2x + h.$$

Если мы положим теперь $h = 0$, то $2x + h$ будет $= 2x + 0 = 2x$. С другой стороны, $\frac{k}{h}$ превратится в $\frac{k}{0}$. Так как однако y превратилось в $y + k$ лишь потому, что x — в $x + h$, то при обращении h в 0, и значит $x\,[+h]$ обратно в $x + 0$, т. е. в x, $y\,[+k]$ снова обратится в y. Таким образом k также обращается в 0, и $\frac{k}{0} = \frac{0}{0}$, что можно представить в виде $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Мы получим таким образом

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Если же, напротив, по Ньютону мы в

$$y + k - x^2 = 2xh + h^2$$

или

$$(y + k) \quad y \quad 2xh + h^2$$

положим $h = 0$ (h превращается в символ dx лишь после того, как оно в своей первоначальной форме было положено $= 0$), то мы получим: $k = 0 + 0 = 0$, и единственный найденный здесь результат есть подтверждение нашей исходной посылки, что y превращается в $y + k$ лишь когда x в $x + h$, откуда следует, что если $x + h = x + 0 = x$, то $y + k = y$, т. е. $k = 0$.

Но мы никоим образом не получаем, как это думает Ньютон:

$$k = 2xdx + dxdx,$$

или в ньютоновском написании

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}.$$

h превращается в $\dot{x}$, и поэтому k—в $\dot{y}$ лишь после того, как h проделало нисхождение в ад через 0, т. е. после того, как разность $x_1 - x$ (или $(x + h) - x$), а потому и $y_1 - y$ $(= (y + k) - y)$ привелись к их абсолютным минимальным выражениям $x - x = 0$ и $y - y = 0$.

Поскольку однако Ньютон не определяет наращений переменных x, y, etc. с помощью математического вывода, но сразу штемпелюет их в дифференциалах x, y, etc., последние не могут быть $= 0$, так как иначе в результате получился бы 0. В самом деле, алгебраическое полагание этих наращений с самого начала $= 0$ приводит лишь к тому же, что и выше полагание сразу же $h = 0$, а значит и $k = 0$, в уравнении $(y + k) - y = 2xh + h^2$, т. е. в последнем счете к $0 = 0$. h не должно полагаться равным нулю, прежде чем первая производная функция x, здесь $2x$, не будет освобождена с помощью деления от множителя h.

Итак получаем

$$\frac{y_1 - y}{h} = 2x + h.$$

Лишь теперь может быть снята конечная разность. Поэтому также и диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = 2x$ должен быть выведен первоначально, до того как мы сможем получить диференциал $dy = 2xdx$.

Таким образом не остается ничего другого, кроме как представить себе наращения переменных как бесконечно малые наращения и приписать им как таковым самостоятельное существование, например в символах $\dot{x}$, $\dot{y}$ или dx, dy. Но бесконечно малые величины суть так же величины, как и бесконечно большие (слово «бесконечно» означает на самом деле лишь неопределенно малые). Поэтому dx, dy, etc. или $\dot{x}$ $\dot{y}$ фигурируют в вычислении в приведенном выше уравнении

$$(y + k) - y \text{ или } k = 2xdx + dxdx$$

так же, как и обыкновенные алгебраические величины. $dxdx$ имеет такое же право на существование, как и $2xdx$.

Уничтожая в $y = uz + zu + uz$ слагаемое uz, вследствие его бесконечной малости по сравнению с uz или zu, мы могли бы математически помочь себе лишь тем, что смотрели бы на $uz = zu$ лишь как на приб-

лиженное значение, мыслимое сколь угодно близким к точному. Подобный маневр встречается и в обыкновенной алгебре. Но тогда получается еще большее чудо: этим методом мы получаем для производной функции x совсем не приближенное, но совершенно точное (пусть, как выше, и лишь символически правильное) значение. Так, отбрасывая $\dot{x}\dot{x}$ в примере $y - 2x\dot{x} + \dot{x}\dot{x}$, мы получаем $u - 2x\dot{x}$ и $\frac{\dot{u}}{\dot{x}} = 2x$, что представляет собой действительно первую производную функцию от x^2, как это доказывает уже бином.

Однако чудо не представляет собой никакого чуда. Было бы действительно чудом, если бы при насильственном уничтожении $\dot{x}\dot{x}$ не получилось точного результата. Именно, уничтожается лишь ошибка вычисления, являющаяся однако неизбежным следствием метода, который вводит неопределенное наращение переменной, например h, сразу же как диференциал dx или $\dot{x}$, как готовый оперативный символ, и тем самым с самого начала утверждает в диференциальном исчислении свойственный ему, отличный от обыкновенной алгебры способ вычисления.

---

1) Если x, изменяясь, превращается в x_1, то A) $x_1 - x = \Delta x$, откуда вытекает: Aa) $\Delta x = x_1 - x$.

a) $x_1 - \Delta x = x$.

Δx, разность между x_1 и x, выраженная таким образом положительно, как приращение x, ибо если ее обратно отнять от x_1, то последнее возвратится к своему первоначальному состоянию, к x.

Разность таким образом может быть выражена двояко: непосредственно как разность между возросшим переменным и его состоянием до возрастания—и это есть ее отрицательное выражение — и положительно—как приращение (как инкремент или декремент)[1]), как результат: как приращение x к тому его состоянию, когда оно еще не возросло — и это положительное выражение.

Мы увидим, какую роль в истории диференциального исчисления играет это двоякое понимание.

b) $x_1 = x + \Delta x$.

x_1 есть самое возросшее x, его рост не отделен от него; x_1 есть совершенно неопределенная форма его роста; эта форма отличает возросшее x, именно x_1, от его первоначальной формы до роста, от x, но она не отличает x от самого его приращения. Отношение между x_1 и x может быть поэтому выражено лишь отрицательно, как разность, как $x_1 - x$. Напротив, в $x_1 = x + \Delta x$

1) Разность выражена положительно как приращение x.

2) Его рост выражен поэтому не как разность, а как сумма его самого в первоначальном состоянии + его приращение.

3) С технической точки зрения x превращается из монома в бином, так что всюду, где в первоначальной функции входило x в какой-нибудь степени, теперь вместо возросшего x выступает бином, который состоит из самого x и его приращения, вообще вместо x^m бином $(x + h)^m$.

[1]) «Или декремент» приписано карандашом.

Развертывание (Entwicklung) роста x становится таким образом в действительности простым применением теоремы о биноме. Так как x выступает как первый, а Δx как второй член этого бинома, что дано самим их взаимоотношением, ибо x должно существовать до появления его приращения Δx, то в действительности при помощи бинома производятся лишь функции от x, тогда как Δx фигурирует при них как множитель в возрастающих степенях, и притом так, что Δx в первой степени, или $(\Delta x)^1$, должно быть множителем второго члена ряда, т. е. множителем первой, произведенной посредством теоремы о биноме функции от x. Это обнаруживается уже, когда x дано во второй степени. x^2 превращается в $(x+\Delta x)^2$, что есть не что иное, как умножение $x+\Delta x$ на самое себя. В результате мы получаем $x^2+2x\Delta x+\Delta x^2$, откуда видно, что первый член должен быть первоначальной функцией от x, а первая производная функция от x^2, в данном случае $2x$, образует второй член с множителем Δx, который в первом члене выступает лишь как множитель $(\Delta x)^0=1$. Производная находится таким образом не диференцированием, а с помощью применения теоремы о биноме, т. е. посредством умножения, и притом как раз потому, что возросшее x_1 фигурирует с самого начала само как бином, как $x+\Delta x$.

4) Хотя в $x+\Delta x$, Δx, что касается ее величины, является столь же неопределенной, как и сама неопределенная переменная x, тем не менее Δx определена как отличная от x, самостоятельная величина, как плод рядом со своею матерью до того, как та забеременела.

$x+\Delta x$ выражает не просто неопределенно, что величина x как переменная возросла, но оно выражает также, насколько она возросла, именно на Δx.

5) x нигде не выступает как x_1; все развитие вертится вокруг приращения, лишь только производная найдена с помощью применения теоремы о биноме, т. е. через подстановку $x+\Delta x$ вместо x в определенную степень x. Только на левой стороне, когда в $\frac{y_1-y}{\Delta x}\cdot\Delta x$ становится $=0$, оно появляется к концу снова как $=x_1-x$, так что $\frac{y_1-y}{\Delta x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}\left(=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Таким образом положительная сторона, содержащаяся в приравнивании разности x_1-x нулю, именно становление x_1 равным x, нигде в развитии не может выступить, так как x_1 как таковое нигде не фигурирует на стороне развернутого ряда. Таким образом настоящая тайна диференциального исчисления нигде не выступает наружу.

6) Если $y=f(x)$ и $y_1=f(x+\Delta x)$, то мы можем сказать, что в этом методе развертывание y_1 [в ряд] уже решает задачу нахождения производной.

c) $x+\Delta x=x_1$ [1]) (следовательно также и $y+\Delta y=y_1$).

Δx может появиться здесь лишь в форме: $\Delta x=x_1-x$, т. е. в отрицательной форме, форме разности между x_1 и x, но не в положительной форме, в виде приращения Δx, как в $x_1=x+\Delta x$.

1) Здесь возросшее x, как x_1, отличается от самого себя по возрастания, т. е. от x, но x_1 не выступает как x, возросшее на Δx, поэтому x_1 остается на самом деле столь же неопределенным, как и x.

2) Далее, x_1 входит в первоначальную функцию, изменившуюся вслед-

[1]) Т. е. $x+\Delta x$ выражается обратно в форме x_1.

ствие нарастания x, точно таким же образом, как x в свою первоначальную функцию. Например если x входит в функцию x^3, то x_1 в функцию x_1^3. Тогда как прежде при замене в первоначальной функции x через $x+\Delta x$ производная доставлялась биномом в совершенно готовом виде, хотя и снабженная множителем Δx и выступающая предводителем других членов, составленных из x и имеющих множителями h^2, etc., теперь из непосредственной формы монома x_1^3 также мало можно вывести непосредственно наращение x, как его можно было вывести из x^3. Что однако этим дано, это разность $x_1^3 - x^3$. Мы знаем из алгебры, что все разности вида $x^3 - a^3$ делятся на $x-a$, стало быть в данном случае на $x_1 - x$. Деля следовательно $x_1^3 - x^3$ на $x_1 - x$ (вместо того чтобы, как прежде, умножить $(x+\Delta x)$ самое на себя столько раз, сколько указано в его показателе степени), мы получаем выражение вида $(x_1 - x)P$, причем представляет ли собой первоначальная функция многочлен (т. е. содержит x в различных степенях) или, как в нашем примере, одночлен — дело от этого не меняется. Это $x_1 - x$ превращается с помощью деления в знаменатель для $y_1 - y$ в левой части, и таким образом там составляется $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, отношение разности функции к разности независимой переменной x, в их абстрактной форме разностей. Разложение разности между функцией, выраженной в x_1, и функцией, выраженной в x, на члены, каждый из которых имеет $x_1 - x$ множителем, может, смотря по свойствам первоначальной функции, потребовать больших или меньших алгебраических маневров, стало быть не всегда выполняется так легко, как в случае $x_1^3 - x^3$. Но это ничего не меняет в методе. Там, где первоначальная функция по самой своей природе не допускает никакого непосредственного разложения в $(x_1 - x)P$, как это имело место для $f(x) = uz$ (две зависящие от x переменные), множитель $(x_1 - x)$ появляется в виде множителя $\frac{1}{x_1 - x}$. Далее, там, где после удаления $x_1 - x$ на левой стороне с помощью деления на него обеих сторон, в самом P еще остается $x_1 - x$ (как например при выводе производной от $y = a^n$, где мы находим

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a^x \left[(a \quad 1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2} (a-1)^2 + \text{etc.} \right],$$

и где полагание $x_1 - x = 0$ дает

$$= a^x \left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.} \right],$$

что $x_1 - x$ может, как в приведенном только что примере, входить лишь так, чтобы при полагании $x_1 - x = 0$ на его месте всегда оставался определенный результат. Другими словами, это остающееся еще в P $x_1 - x$ не может быть соединено с другими элементами P как множитель. В противном случае P можно было бы представить в виде $P = p(x_1 - x)$ и значит, так как $x_1 - x$ было уже положено $= 0$, в виде $p \cdot 0$, что означало бы, что $P = 0$.

Первая конечная разность $x_1^3 - x^3$ (если $y = x^3$ и $y_1 \quad x_1^3$) развивается таким образом в $y_1 - y = (x_1 - x)P$, откуда $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = P$. P—выражение, представляющее собой комбинацию из x_1 и x, — равно f^1, производной

от первой конечной разности, откуда $x_1 - x$ так же исключено, как и более высокие степени $(x_1 - x)^2$ и т. д. x_1 и x могут поэтому комбинироваться только в положительных выражениях, каковы $x_1 + x$, $x_1 x$, $\frac{x_1}{x}$, $\sqrt{x_1 x}$ etc. Значит, если мы положим теперь $x_1 = x$, то эти выражения превратятся соответственно в $2x, x^2$, $\frac{x}{x}$ или $1, \sqrt{xx}$ или x, etc., и только на левой стороне, где $x_1 - x$ образует знаменатель, появляется 0, откуда символические диференциальные коэфициенты etc.

II

Исторический ход развития

1) *Мистическое диференциальное исчисление.*

$x_1 = x + \Delta x$ с самого начала превращается в $x_1 - x + dx$ или $= x + \dot{x}$, где dx предпосылается с помощью метафизического разъяснения. Сперва существует, а затем разъясняется.

Но тогда также и $y_1 = y + dy$ или $y_1 - y + \dot{y}$. Из этого произвольного предположения вытекает как следствие, что для получения правильного результата необходимо в разложение бинома $x + \Delta x$ или $x + \dot{x}$ отбросить (wegeskamotieren) члены, содержащие x и Δx, полученные наряду с первой производной и т. д. и т. п.

Так как при фактическом построении диференциального исчисления исходят из этого последнего результата, именно из диференциальных частиц (Differentiellen)[1]), которые предвосхищаются, не выводятся, а предпосылаются с помощью разъяснения, то с помощью этого же разъяснения предвосхищается и $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ — символический диференциальный коэфициент.

Если наращение $x = \Delta x$, а наращение зависящей от него переменной $= \Delta y$, то само собой разумеется, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет отношение приращений x и y. Но то, что Δx фигурирует в знаменателе, т. е. наращение независимой переменной стоит в знаменателе вместо числителя, а не наоборот, — это получается вследствие того, что последний результат развития самих диференциальных форм, именно диференциал (das Differential) $[dy = f'(x)\,dx]$, при предпосылании диференциальных частиц (Differentiellen) $[dy$ и $dx]$, также дается с самого начала.

Если я возьму наипростейшее взаимоотношение зависимой переменной y и независимой переменной x, именно $y - x$, то я знаю, что $dy - dx$, или $\dot{y} = \dot{x}$. Так как однако я ищу производную по независимой переменной x, то я должен разделить обе стороны на $\dot{x}$ или dx; итак:

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1.$$

Я знаю стало быть раз навсегда, что в символическом диференциальном коэфициенте приращение (независимой переменной) должно стоять в знаменателе, а не в числителе.

[1]) См. примечание на стр. 23.

Начиная однако с функций от x второй степени, производная находится сразу с помощью разложения бинома, в котором она появляется вполне готовою во втором члене, в сопровождении dx или $\dot{x}$, т. е. первой степени приращения + подлежащие отбрасыванию (wegzueskamotierende) члены. Однако отбрасывание (Eskamotage) это, хотя и не осознанным образом, математически правильно, ибо отбрасывается лишь ошибка вычисления, возникшая с самого начала из первоначального отбрасывания (Eskamotage).

$x_1 = x + \Delta x$ надлежит лишь превратить в $x_1 = x + dx$ или $x + \dot{x}$ и затем остается хозяйничать с этим диференциальным биномом как с обыкновенным, что с технической точки зрения было очень удобно.

Остается ответить на один лишь вопрос: на каком основании совершается насильственное уничтожение стоящих на пути членов?

Ведь это уже предполагает, что знают, что они стоят на пути и в действительности не принадлежат к производной.

Ответ очень прост: это нашли чисто экспериментальным путем. К тому времени были известны действительные производные многих и более сложных функций от x в их аналитической форме уравнений кривых. Но и без того то обстоятельство, что следующие за вторым члены не принадлежат к производной, открыли уже в самом первом возможном решающем эксперименте, именно при рассмотрении простейших алгебраических функций второй степени. Например

$$y = x^2$$
$$y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2,$$
$$y + \dot{y} = (x + \dot{x})^2 = x^2 + 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

Отняв от обеих сторон первоначальную функцию $x^2 (y = x^2)$, получим

$$dy = 2x\,dx + dx^2,$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x} + \dot{x}^2.$$

Уничтожая последние члены обоих равенств, будем иметь

$$dy = 2x\,dx,$$
$$\dot{y} = 2x\dot{x}$$

и далее

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

или

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x.$$

Но известно, что в разложении бинома $(x + a)^2$ первым членом является x^2, вторым $2xa$. Разделив это последнее выражение на a, как выше $2x\,dx$ на dx или $2x\dot{x}$ на $\dot{x}$, мы получим $2x$ как первую производную от x^2, как наращение, выраженное в x, которое бином добавил к x^2. Стало быть для нахождения производной необходимо было унич-

тожить dx^2 или $\dot{x}\dot{x}$ совершенно не обращая внимание на то, что с этим dx^2 или $\dot{x}\dot{x}$ самим по себе невозможно было справиться.

Итак экспериментальным путем — уже на втором шагу — мы с необходимостью приходим к уразумению того, что для получения не только истинного, но и вообще какого бы то ни было результата нужно отбросить dx^2 или $\dot{x}\dot{x}$.

С другой стороны, в $2xdx+dx^2$ или $2x\dot{x}+\dot{x}\dot{x}$ мы имеем перед собой правильное математическое выражение второго и третьего члена бинома $(x+dx)^2$ или $(x+\dot{x})^2$. Что этот математически правильный результат основывается на столь же математически ложном в самом основании предположении, именно на замене с самого начала $x_1-x-\Delta x$ через x_1-x-dx или $\dot{x}$, — этого не знали. В противном случае тот же результат получили бы при помощи не фокуса (Eskamotage), а алгебраической операции простейшего стиля, и в таком виде презентовали бы его математическому миру.

Итак сами верили в мистический характер новооткрытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызвали таким образом враждебный крик, отдавшийся даже в мире несведущих в математике людей и бывший необходимым, для того, чтобы проложить путь новому.

2) *Рациональное дифференциальное исчисление*

Д'Аламбер начинает непосредственно с отправного пункта Ньютона и Лейбница: $x_1=x+dx$. Однако он вносит сразу фундаментальную поправку: $x_1=x+\Delta x$, т. е. $x+$ неопределенное, однако prima faciae конечное приращение, которое он обозначает через h. Превращение этого h или Δx в dx (он, как и все французы, придерживается лейбницевских обозначений) происходит лишь как конечный результат развития или по крайней мере непосредственно перед концом, тогда как у мистиков и инициаторов исчисления оно является исходным пунктом (Д'Аламбер сам исходит из символической стороны однако до того, как она превращается в символ).

Этим достигается сразу двойной [1]) результат:

а) Отношение разностей $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ имеет исходным пунктом своего образования 1) $f(x+h)-f(x)$, что соответствует заданной в x алгебраической функции, получающейся, когда мы в первоначальную функцию, например в x^3, подставим вместо x его самое с его приращением, т. е. $x+h$. Эта форма $(=y_1-y$ если $y=f(x))$ есть форма разности функций, форма, которая для превращения в отношение приращения функции к приращению независимой переменной

[1]) Результат оказался однако не двойным, а более сложным, и Маркс отказался в дальнейшем от двойной нумерации буквами и числами, почему пункта «б» так и не последовало.

требует развития, которая стало быть играет реальную роль, а не чисто номинальную, как у мистиков. Действительно, если я имею у них

$$f(x) \quad x^3,$$
$$f(x+h) \quad (x+h)^3 \quad x^3+3x^2h+3xh^2+h^3,$$

то я знаю уже заранее, что противостоящие стороны равенства

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$$

сводятся к приращениям. Эти разности не нужно и писать, так как я вижу на второй стороне, что приращение x^3 = трем следующим членам, так же как в $f(x+h)-f(x)$ остается лишь приращение $f(x)$ или dy. Таким образом первое разностное уравнение, если и играет, то лишь с самого начала вновь исчезающую роль. На обеих сторонах уже с самого начала противостоят друг другу приращения, а имея их, я имею, согласно определению dx и dy, их отношение $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{y}{x}$ etc. Таким образом для получения $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{y}{x}$ я вовсе не нуждаюсь в первой разности, образованной путем вычитания первоначальной функции x из измененной (через подстановку $x+h$ вместо x) функции (возросшей функции).

У Д'Аламбера же необходимо удерживать эту разность, ибо развитие должно происходить на ней. Поэтому вместо положительного выражения разности, именно приращения, на левой стороне выступает на первый план отрицательное выражение приращения, именно разность $f(x+h)-f(x)$. И это ударение на разности вместо приращения (флюксии у Ньютона) по крайней мере предчувствовано в лейбницевском обозначении dy в противоположность ньютоновскому $\dot{y}$.

2) $$f(x+h)-f(x)=3x^2h+3xh^2+h^3.$$

Деля обе стороны на h, мы получаем

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad 3x^2+3xh+h^2.$$

Этим самым на левой стороне образуется

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x},$$

появляющееся таким образом как **произведенное отношение конечных разностей**, тогда как у мистиков оно было готовым отношением приращений, данных определением [лиференциальных частиц] dx или $\dot{x}$ и dy или $\dot{y}$.

3) Если теперь положить в $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\frac{f(\quad)-f(x)}{x_1-x}$ $h=0$ или x_1 x и значит x_1-x 0, то это выражение превращается в $\frac{dy}{dx}$, тогда

как одновременно с этим вследствие обращения h в 0 члены $3xh + h^2$ также обращаются в нуль и притом с помощью правильной математической операции. Они удалены теперь таким образом без фокуса. Мы получаем:

4) $$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{dy}{dx} = 3x^2 = f'(x).$$

Последнее существовало, как и у мистиков, уже как данное, как только x стало $x + h$. Ибо полагание $(x+h)^3$ вместо x^3 дает: $x^3 + 3x^2h + \text{etc}$, где $3x^2$ уже появляется во втором члене ряда в качестве коэфициента при h в первой степени. Поэтому вывод является существенно тем же, что у Лейбница и Ньютона, однако готовенькая производная $3x^2$ высвобождается из ее прочего окружения строгим алгебраическим путем. Здесь не происходит никакого развития (Entwicklung) $f'(x)$, в данном случае $3x^2$, но лишь высвобождение (Loswicklung) ее от ее множителя h и от выстроившихся рядом с ней остальных членов. Но что действительно развивается, так это левая символическая сторона, именно dx, dy и их отношение, символический диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ (вернее, наоборот, $\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx}$), который в свою очередь возбудил кое-какие метафизические страхи, хотя символ и выведен математическим путем.

Сорвав с диференциального исчисления мистический наряд, Д'Аламбер сделал громадный шаг вперед. Хотя его Traité des fluides появился в 1744 г. (см. стр. 15)[1]), лейбницевский метод продолжал господствовать во Франции еще многие годы спустя. Едва ли стоит заметить, что Ньютон господствовал в Англии вплоть до первых десятилетий XIX в., но здесь, хотя и позже чем во Франции, также стало господствующим даламберовское обоснование, вплоть до настоящего момента, с некоторыми модификациями.

3) Чисто алгебраическое диференциальное исчисление. Лагранж «Théorie des fonctions analytiques» (1797 и 1813).

Первым исходным пунктом, как и в 1) и 2), было возросшее x: если y или $f(x) = \text{etc.}$, то y_1 или $f(x+dx)$ в мистическом методе, y_1 или $f(x+h) (= f(x+\Delta x))$ в рациональном.

Этот биноминальный исходный пункт дает нам сразу на другой стороне разложение бинома, например

$$x^m + mx^{m-1}h + \text{etc.},$$

уже во втором члене которого, в $mx^{m-1}h$, содержится в совершенно готовом виде искомый реальный диференциальный коэфициент mx^{m-1}.

а) Стоящее на левой стороне $f(x+h)$ относится к противостоящему ему развернутому ряду, коль скоро в заданную первоначальную функцию от x вместо x подставлено $x+h$, точно таким образом, как в алгебре неразвернутое общее выражение, и именно опять-таки бином, относится к соответствующему ему развернутому ряду, например как в $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + \text{etc.}$ $(x+h)^3$ относится к эквивалентному ему развернутому ряду $x^3 + 3x^2h + \text{etc.}$

---

[1]) Здесь стр. 44.

Тем самым $f(x+h)$ выступает в том же алгебраическом отношении (лишь примененном к переменным величинам), в каком во всей алгебре стоит общее выражение к его разложению, например в

$$\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}$$

$\frac{a}{a-x}$ к развернутому ряду $1+\text{etc.}$, или в

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$$

$\sin(x+h)$ к противостоящему ему разложению.

Д'Аламбер лишь алгебраизировал $x+dx$ или $x+\dot{x}$ в $x+h$ и стало быть также $f(x+h)$ из $y+dy$, $y+\dot{y}$ в $f(x+h)$. Но Лагранж придал всему выражению чисто алгебраический характер, противопоставив ему как общему неразвернутому выражению долженствующий быть произведенным из него ряд.

b) В первом методе 1), равно как в рациональном 2), искомый реальный коэфициент доставляется в совершенно готовом виде теоремой о бином и находится уже как второй член развернутого ряда, стало быть в члене, необходимо содержащем h^1. Весь дальнейший диференциальный процесс, будь это как в 1), будь это как в 2), есть таким образом роскошь. Отбросим поэтому в сторону бесполезный баласт. Мы знаем раз навсегда из биномиального разложения, что первый реальный коэфициент является множителем при h, второй при h^2 и т. д. Эти реальные диференциальные коэфициенты являются не чем иным, как последовательно развитыми биномом производными функциями первоначальной функции x (и эта простейшая категория [?] производных функций — одна из важнейших). Что же касается отдельных диференциальных форм, то мы знаем, что Δx превращается в dx, Δy в dy, что первая производная получает символическую фигуру $\frac{dy}{dx}$, вторая производная, коэфициент при $\frac{h^2}{2}$, — символическую фигуру $\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. Мы можем следовательно ради симметрии представить наши результаты, полученные чисто алгебраическим путем, одновременно и в этих их символических диференциальных эквивалентах — дело номенклатуры, которая одна лишь остается от собственно диференциального исчисления. «Вся действительная задача сводится тогда к нахождению (алгебраических) методов разложения всех видов функций от $x+h$ по целым возрастающим степеням h, что во многих случаях не может быть выполнено без чрезвычайно большого количества операций» [1]).

До сих пор у Лагранжа нет ничего, что не могло бы быть получено непосредственно исходя из метода Д'Аламбера (ибо последний метод также содержит лишь в исправленном виде весь ход вывода у мистиков).

c) Но как только разложение y_1 или $f(x+h)=\text{etc.}$ занимает место прежнего диференциального исчисления (и тем самым в действительности ярко выступает тайна методов, исходящих из $y+dy$ или $y+\dot{y}$, $x+dx$ или $x+\dot{x}$, именно, что их действительное развитие, поскольку они с самого

1) Цитата приведена Марксом по-английски. Источник не указан.

начала представляют возросшее x_1 как $x+dx$, возросшее y_1 как $y+dy$ и таким образом превращают моном в бином, основывается на применении теоремы о биноме), возникает задача, — так как мы имеем перед собой в $f(x+h)$ функцию от x без степени, лишь ее общее неразвернутое выражение,—алгебраически вывести из самого этого неразвернутого выражения общий, следовательно пригодный для функций от x, содержащих какие угодно степени, ряд.

Здесь для алгебраизации диференциального исчисления Лагранж берет в качестве своего непосредственного исходного пункта теорему переженитого ньютонианцами и Ньютоном Тэйлора, которая в действительности представляет собой самую общую, всеохватывающую теорему и одновременно оперативную формулу диференциального исчисления, именно выраженный в символических диференциальных коэфициентах развернутый ряд для y_1 или $f(x+h)$:

$$y_1 \text{ или } f(x+h) = y \text{ (или } f(x)) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2\cdot 3} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

d) Сюда вставить исследование о теоремах Маклорена и Тэйлора.

e) Лагранжево алгебраическое разложение $f(x+h)$ в эквивалентный ряд, заменяющее тэйлоровские $\frac{dy}{dx}$ etc. и затем оставляющее их как символические диференциальные выражения для алгебраически произведенных функций от x. (Развить это затем дальше.)

c) Продолжение стр. 25 [1]).

Мы имеем $x_1 - x = \Delta x$ первоначально как выражение разности $x_1 - x$ разность выступает здесь лишь в своей форме разности (как и $y_1 - y$, что пишется обычно, когда y зависимая от x). Полагая $x_1 - x = \Delta x$, мы даем разности уже некоторое отличное от нее самой выражение. Мы выражаем, хотя и в неопределенной форме, значение этой разности в виде некоторой отличной от самой разности величины. Например $4-2$ есть чистое выражение разности между 4 и 2; но $4-2=2$ есть разность, выраженная через 2 (на правой стороне) a) в положительной форме, стало быть уже не как разность; b) вычитание выполнено, разность вычислена и $4-2=2$ дает мне $4=2+2$. Второе 2 выступает здесь в положительной форме приращения первоначального 2, стало быть в форме, прямо противоположной форме разности. (Точно так же $a-b=c$; $a=b+c$, где c выступает в качестве приращения b; точно так же $x_1 - x = \Delta x$, $x_1 = x + \Delta x$, где Δx выступает непосредственно как приращение x.)

Простое первоначальное полагание $x_1 - x = \Delta x =$ чему-нибудь ставит таким образом на место формы разности другую, именно форму суммы $x_1 = x + \Delta x$; вместе с тем $x_1 - x$, выражающее лишь разность, становится эквивалентом значения этой разности, величины Δx.

Таким же образом из $x_1 \quad x \quad \Delta x$ получается $x_1 - \Delta x \quad x$. Мы имеем здесь снова на левой стороне форму разности, но разности между возросшим x и его собственным приращением, выступающим самостоятельно

[1]) Здесь стр. 49.

рядом с ним. Разность между ним и приращением x, равным Δx, есть разность, которая теперь, хотя и неопределенно, выражает некоторое определенное значение x.

Но если исходят из мистического диференциального исчисления, где $x_1 - x$ выступает сразу как dx, и переправляют сначала dx на Δx, то исходным пунктом становится $x_1 - x = \Delta x$; однако тогда это может быть в свою очередь обратно перевернуто в $x + \Delta x - x_1$, так что возрастание x опять приобретет неопределенную форму x_1 и как таковое войдет непосредственно в исчисление — что является исходным пунктом развитого нами метода.

d) Из этого простого различия в форме сразу вытекает коренное различие в трактовке исчисления, которое мы вкратце обрисовали (см. приложенные отдельные листки) [1]) при анализе метода Д'Аламбера. Здесь лишь в общем виде заметим:

1) Если разность $x_1 - x$ (значит также и $y_1 - y$) выступает сразу в виде своей противоположности, в виде суммы, и следовательно значение ее величины в положительной форме приращения Δx, то, заменяя всюду в первоначальной функции в x ($\text{in}\, x$) x через $x + \Delta x$, мы придем к задаче разложения в ряд биномов определенных степеней и развитие x_1 разрешается в применение теоремы о биноме. Теорема о биноме есть не что иное, как общее выражение того, что получится, если бином первой степени умножить самого на себя m раз. Поэтому умножение будет служить методом развития x_1 $(x + \Delta x)$, если с самого начала представить разность как ее противоположность, как сумму.

2) Так как в общем выражении $x_1 = x + \Delta x$ разность в положительной форме Δx, т. е. в форме приращения, составляет последний или второй член, то x будет первым членом, а Δx — вторым в первоначальной функции в x ($\text{in}\, x$), когда последняя представлена как функция в $x + \Delta x$ ($\text{in}\, x + \Delta x$). Но мы знаем из теоремы о биноме, что второй член фигурирует лишь как множитель в возрастающих степенях при первом, так что множителем при первом выражении в x ($\text{in}\, x$) (определенном степенью бинома) является $(\Delta x)^0 = 1$, множителем при втором $\Delta x)^1$, при третьем $(\Delta x)^2$ и т. д. Таким образом разность в положительной форме приращения выступает лишь как множитель, и притом действительно как множитель (так как $(\Delta x)^0 = 1$), начиная со второго члена этого развернутого бинома $(x + \Delta x)^m$.

3) С другой стороны, если мы рассмотрим развертывание самих функций в x ($\text{in}\, x$), то увидим, что теорема о биноме дает нам для первого члена, здесь x, по порядку его производные функции. Например, если мы имеем алгебраический бином $(x + h)^4$, где h считаем известным, а x неизвестным, то мы получаем:

$$x^4 + 4x^3h + \text{etc.}$$

$4x^3$, стоящее во втором члене и имеющее множителем h в первой степени, является таким образом первой производной функцией от x,

[1]) Имеются две рукописи на отдельных листках, посвященные анализу метода Д'Аламбера. Одна из них, озаглавленная нами «Сравнение марксова метода диференцирования с методом Д'Аламбера» приводится здесь (см. стр. 13). Имел ли Маркс в виду именно эти рукописи не установлено.

или, выражаясь алгебраически: если мы имеем неразвернутое выражение бинома $(x+h)^4$, то развернутый ряд дает нам в качестве первого прироста к x^4 (его приращения) $4x^3$, которое выступает как коэфициент при h. Но если x является переменной величиной и мы имеем $f(x)=x^4$, то это [выражение] при своем собственном возрастании превращается в $f(x+h)$ и в окончательной форме в

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4=x^4+4x^3\Delta x+\text{etc.}$$

x^4, которое в обыкновенном алгебраическом биноме $(x+h)^4$ было дано нам как первый член этого бинома, выступает теперь в биномиальном выражении переменной x, в $(x+\Delta x)^4$, как воспроизведение первоначальной функции в x ($\ln x$) до того, как последнее возросло и стало $x+\Delta x$. Уже из самой природы теоремы о биноме прямо явствует, что если $f(x)=x^4$ превращается в $f(x+h)=(x+h)^4$, то первый член в $(x+h)^4$ должен быть $=x^4$, т. е. = первоначальной функции в x ($\ln x$); $(x+h)^4$ должно содержать первоначальную функцию в x ($\ln x$) (здесь x^4) + вдобавок все члены, которые x^4 приобрело при превращении в $(x+h)^4$, следовательно первый член в разложении бинома [есть первоначальная функция].

4) Далее: второй член биномиального разложения, $4x^3h$, доставляет нам сразу в совершенно готовом виде первую произведенную из x^4 функцию, именно $4x^3$. Эта производная получена таким образом при помощи развертывания $f(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^4$, получена благодаря тому, что разность x_1-x с самого начала была представлена как ее противоположность, как сумма.

Итак, именно биномиальное разложение для $f(x+\Delta x)$ или y_1, получающегося из $f(x)$ при возрастании x, доставляет нам первую производную, коэфициент при h (в биномиальном ряду), и притом в самом начале биномиального разложения, в его втором члене. Таким образом производная никоим образом не получена путем диференцирования, но просто с помощью разложения $f(x+h)$ или y_1 в некоторое определенное выражение, полученное простым умножением.

Исходным пунктом этого метода является стало быть развитие неопределенного выражения y_1 или $f(x+h)$ в определенной биномиальной форме, однако никоим образом не развитие x_1-x и следовательно также y_1-y или $f(x+h)-f(x)$ как разностей.

Так как мы сразу получаем

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^4=x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+4x\Delta x^3+\Delta x^4,$$

то единственное разностное уравнение, встречающееся в этом методе, именно:

$$[(x+\Delta x)^4-x^4]=x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+4x\Delta x^3+\Delta x^4-x^4,$$

получающееся, когда мы в конце обратно вычитаем первоначальную функцию x^4, находящуюся в начале ряда, выражает, что мы имеем перед собой приращение, которое получила первоначальная функция в x ($\ln x$) при биномиальном разложении.

Итак мы имеем приращение

$$4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+4x\Delta x^3+\Delta x^4,$$

приращение первоначальной функции x^4. Поэтому на противоположной стороне мы не нуждаемся ни в каком разностном уравнении

какого бы то ни было рода. Приращению x соответствует приращение y, где y или $f(x)=x^4$. Почему Ньютон сразу и пишет:

$$(\dot{y})\ \text{у него}\ \dot{y}=4x^3\dot{x}+\text{etc.}$$

6) Все дальнейшее развитие состоит лишь в том, чтобы высвободить совершенно готовую производную $4x^3$ от ее множителя Δx и от ее соседних членов, извлечь ее из ее окружения. Таким образом это не метод развития, но лишь метод высвобождения (keine Entwicklungs-sondern Loswiklungsmethode).

е) *Диференцирование* $f(x)$ (*как общего выражения*).

Заметим сначала, что понятие производных функций для последовательных реальных эквивалентов символических дифференциальных коэфициентов было совершенно неизвестно первоначальным изобретателям дифференциального исчисления и их первым последователям; в действительности оно было впервые введено Лагранжем. У первых фигурирует лишь зависимая переменная, например y, как функция от x, целиком в соответствии с первоначальным алгебраическим смыслом понятия функции, примененным сперва к так называемым неопределенным уравнениям, где дано больше неизвестных, чем уравнений, и где стало быть y, например, принимает различные значения при подстановке различных значений для x. Но у Лагранжа первоначальная функция представляет собой определенное алгебраическое выражение от x, которое должно быть продифференцировано; значит если y или $f(x)=x^4$, то x^4 есть первоначальная функция, $4x^3$ — первая производная и т. д. Поэтому во избежание путаницы будем называть y, зависимую [переменную] или $f(x)$, функцией от x (von x), первоначальную же функцию в лагранжевом смысле первоначальной функцией *в* x (in x) и соответственно «производные» — функциями в x (in x).

В алгебраическом методе, где мы сперва развиваем конечную разность и получаем предварительную производную, и лишь из нее окончательную производную f', мы знаем с самого начала: $f(x)=y$, следовательно $\Delta f(x)=\Delta y$, а поэтому и наоборот $\Delta y=\Delta f(x)$. Что сперва надлежит развить, это как раз $\Delta f(x)$, значение конечной разности от $f(x)$. Мы находим: $f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^1(x)$, значит также

$$\Delta y=f^1(x)\Delta x.\ \text{И так как}\ \Delta y=\Delta f(x),\ \text{то}$$
$$\Delta f(x)=f^1(x)\Delta x.$$

Дальнейшее развитие дифференциального выражения, доставляющее нам в заключение:

$$df(x)=f^1(x)\,dx,$$

есть просто диференциальное выражение развитой до этого конечной разности.

В обычном методе dy или $df(x)=f'(x)\,dx$ вообще не развивается, но (см. выше) доставляемое биномом $(x+\Delta x)$ или $(x+dx)$ в совершенно готовом виде $f'(x)$ лишь высвобождается от его множителя и соседних членов.

ТРИУМФ МАРКСИЗМА — НАУКИ ПРОЛЕТАРИАТА

Э. КОЛЬМАН

1. УСПЕХИ ПЕРВОЙ ПЯТИЛЕТКИ И ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕВОЛЮЦИЯ

«Факт, наиболее выдающийся в современной истории»,—так охарактеризовал январский пленум ЦК и ЦКК выполнение пятилетки в Советском союзе в четыре года в обстановке жесточайшего растущего кризиса во всем капиталистическом мире.

Гиганты металлургии, химии, машиностроения, мощные электростанции, выросшие вокруг них новые города, новые культурные центры, преобразование всей географии огромной страны, коренная переделка сельского хозяйства из мелкого, индивидуального, примитивного в крупное коллективное, машинизированное; превращение страны, еще в недавнем прошлом нищей, полудикой, перенесшей жесточайшие тяготы войны и многочисленных интервенций, преодолевшей ожесточенное, упорное, изворотливое сопротивление капиталистических элементов и их агентов, оппортунистов справа и «слева»,—в страну современной индустрии, выходящую по ряду отраслей на первое место в мире, в страну культурную, которая станет вскоре страной сплошной грамотности, в страну, где рождается новый человек, где растут многочисленные кадры пролетарской производственно-технической интеллигенции, все это, что даже нас, участников этого дела, поражает своей грандиозностью масштабов и темпов, вызывая удивление и восхищение у наших друзей, вынужденное

признание и скрежет зубовный у наших врагов,—все это конечно не чудо, а результат непоколебимого ленинского руководства нашей большевистской партии, которая неуклонно проводит ленинский план строительства социализма, беспощадно сокрушает классового врага и ведет за собой все растущие массы ударников—энтузиастов социалистического строительства.

Но первая пятилетка, пятилетка грандиозных достижений в индустриальной реконструкции всего народного хозяйства, является вместе с тем пятилеткой технической революции.

В шесть раз увеличилась мощность электростанций. Мы имеем в нашей промышленности свои мощные турбогенераторы в 50 тыс. *квт* своего производства, мощные гидрогенераторы, котлы высокого давления, мощные высоковольтные трансформаторы, свои асинхронные двигатели. Наши электростанции связаны системой электрических колец, по централизации электроэнергии мы занимаем второе место в мире. Эти успехи электрификации повлекли за собой то, что электрическим путем мы стали выделывать алюминий, имеем свою электрометаллургию качественных сталей, свою электротермию, электросварка начинает вытеснять примитивные методы сварки в машиностроении. Крепнет наша электрохимия, налицо успешные зачатки электрификации железных дорог, свои электровозы, электропривод начинает все более и более заменять трансмиссию. У нас уже своя высокочастотная электропромышленность.

Мотор внутреннего сгорания идет вровень с электродвигателем. Трактор, автомобиль, авиастроение у нас развиваются гигантскими шагами.

Вместе с тем мы произвели полную техническую реконструкцию сельского машиностроения, имеем колоссальнейшие успехи в области химической промышленности. Здесь нет возможности дать хотя бы только одну номенклатуру тех машин, тех агрегатов, которые производятся в нашей стране.

Если посмотрим на ведущее звено нашей индустрии—на машиностроение, то увидим, как оно электрифицируется. Электросварка, электрохимия, сверхтвердые сплавы, литье под давлением, холодная и горячая штамповка, механическая шлифовка, автоматизм—завоевывают здесь все больше места. Нет такой машины, которую бы мы не могли построить на наших советских заводах.

С полным правом можем сказать, что в нашей стране век пара—век капитализма, сменяется веком электричества—веком социализма.

Разумеется, что эта техническая революция оказалась возможной благодаря тому, что, опираясь на все достигнутые успехи за последние годы, наша партия вырастила многотысячные кадры специалистов из людей рабочего класса, что наша партия сумела сломать саботаж и вредительство, разоблачить контрреволюционную суть разных Чарновских и Федотовых, которые боролись против новой техники, боролись за сохранение СССР на техническом уровне полуколониальных стран, что партия сумела добиться того, чтобы подавляющее большинство старых технических кадров включилось в активную борьбу за новую технику, добиться того, чтобы миллионы трудящихся сделали лозунг овладения техникой насущным интересом своей жизни.

Разумеется, что эта техническая революция оказалась возможной благодаря использованию опыта передовой техники капитализма, смелому приспособлению этого опыта к нашим условиям, благодаря созданию

огромной сети научно-исследовательских институтов и лабораторий и тому невиданному размаху, которого достигла научная мысль в Советском союзе.

2. СОСТОЯНИЕ НАУЧНОГО ФРОНТА И НАШИ ЗАДАЧИ

Это последнее по счету условие—наши достижения на фронте науки—является одним из первейших по важности в дальнейшем осуществлении задачи «догнать и перегнать передовые капиталистические страны экономически и технически».

Завоевания на научном фронте являются составной частью культурной революции.

Страна, в которой количество неграмотных пало ниже 10%, страна, в которой учится до 38 млн. человек—от мала до велика каждый четвертый, пятый житель нашего Союза учится,—эта страна имеет в области науки такие количественные показатели.

В начале пятилетки мы имели 222 научно-исследовательских института, теперь мы их имеем 770.

В начале пятилетки у нас было 20 тыс. научных работников, теперь их у нас 51 тыс.

В начале пятилетки в научное исследование страна вкладывала 137 млн. руб., в конце пятилетки, в 1932 г.,—731 млн. руб.

При этом следует учесть, что до Октябрьской революции в царской России было всего-навсего 18 научно-исследовательских учреждений, а теперь одна Всесоюзная академия наук насчитывает 78 крупнейших институтов. Мы имеем академии наук в союзных республиках, Коммунистическую академию с ее институтами, растущую сеть марксистско-ленинских институтов на периферии, Ленинскую сельскохозяйственную академию и т. д. и т. п.

При этом следует принять во внимание, что в отличие от царской России и от капиталистических стран научная жизнь протекает не в одних лишь столицах, а в соответствии с ленинской национальной политикой, проводимой нашей партией, все более широко растут научно-исследовательские институты и кадры на периферии, в наших союзных республиках, в национальных районах. Необходимо отметить, что по СССР раскинулась громадная сеть фабрично-заводских лабораторий, приближающих науку к производству и к рабочему, содействующих вместе с рабочим изобретательством выдвижению и подготовке научных работников из рядов рабочего класса.

Переходя к состоянию и задачам отдельных областей науки, мы должны четко различать науки о природе в широком смысле этого слова и науки общественные.

В то время как науки математические, естественные, медицинские, психоневрологические имеют вековой стаж существования, общественные науки существуют как подлинные науки лишь десятилетия. Однако именно в области естественных наук позиции марксизма-ленинизма весьма слабы как по количеству наших кадров, так и в смысле проникновения в эти области марксистского метода, утверждения в них марксистского мировоззрения, в науках же социально-экономических марксизм-ленинизм занимает господствующее место как в смысле кадров, так и в смысле методов и содержания. Отсюда и разница в подходе при оценке положения.

Не имея возможности останавливаться на всех отраслях математических, естественных, медицинских, психоневрологических наук, рассмотрим прежде всего, каково положение у нас с физикой, той наукой, которая в области естествознания играет ведущую роль—не потому конечно, что можно, как это полагают механисты, свести все естественные науки к физике. Нет, высшие формы движения, изучаемые, скажем, в химии или в биологии, не сводимы к изучаемым в физике, но в то же время включают их; а физические методы измерения, экспериментирование, анализ явлений физики служат своего рода школой для всего естествознания.

Положение естествознания, в частности физики, до революции, по признанию самих ученых старой формации, обстояло весьма плачевно.

До Октябрьской революции теоретическая мысль была мало активна, она была оторвана от практики, ее материальная база была исключительно скудна. Академик С. И. Вавилов в статье «Физика в России и в СССР» пишет, что «до XX в. физики в России в сущности не было, она развертывалась лишь в ряде эпизодов, почти не связанных между собою, только от поры до времени и очень редко в стране делались открытия, на которые на родине не обращалось внимания и о которых, как правило, за рубежом узнавали с опозданием как об историческом курьезе. Научная работа сводилась главным образом к диссертациям, которые составлялись по необходимости, для продвижения по службе». Эта характеристика состояния физики в основном верна для всего естествознания царской России.

А сейчас по одной лишь физике мы имеем громадную сеть новых институтов, в одном только Ленинграде 4 института, и среди них такой, как Физико-технический институт, руководимый академиком Иоффе, институт, равного которому нет в Европе. Эти институты имеют лучшее оборудование, дорогие приборы, редчайшую аппаратуру. Сеть физических институтов раскинута по нашим республикам, работают институты в Харькове, в Томске, в Свердловске строится физический институт и т. д.

Большинство работ этих институтов печатается в заграничных журналах, работы наших советских физиков занимают страницы заграничных, особенно германских, научных журналов. Кроме того мы имеем два больших советских физических журнала, один на русском, другой на немецком языке. По количеству напечатанных работ, содержащих оригинальные открытия, мы в области физики продвинулись на второе место в мире.

Мы теперь и в области строительства тончайших приборов, нужных для научного исследования, в основном освободились от зависимости от капиталистических стран. Фотоэлементы, рентгеновские установки, крупнейший 80-сантиметровый объектив для рефрактора, электроизмерительные приборы, новые источники света, математическая аппаратура—все это строится теперь у нас, на наших заводах точной механики и оптики и в наших физических лабораториях.

Мы теперь умеем ставить в наших лабораториях своими собственными руками тончайшие, труднейшие опыты. Не имея возможности излагать содержание этих опытов и новых теорий, остановлюсь на одном из самых последних успехов, характеризующем достигнутый нами уровень в научно-исследовательской работе,—на работе Украинского физико-технического института по разложению ядра атома лития. Коллективу работ-

ников этого института удалось добиться таких сверхвысоких напряжений, построить импульсный генератор на 1,5 млн. вольт и трансформатор Тесля на 2,5 млн. вольт и бомбардировкой быстродвижущихся частиц разбить ядро атома элемента лития.

Какое значение имеют подобные работы? Они имеют прежде всего громадное теоретическое значение; применяемые в них методы находят применение в электропромышленности, наконец они ободряют нас, показывая, что мы в состоянии достичь того же, чего почти одновременно достигли Коккрофт и Вольтон с их передовой выучкой и техникой исследования. Но и практическое значение этих опытов если не на сегодняшний день, то в будущем может стать громадным.

Профессор Колумбийского университета Берзден Девис излагает в декабрьском номере американского журнала «Сайнс» перспективы, которые открывает этот опыт для техники весьма недалекого будущего. Говоря о том, что сейчас создается новая наука, внутриядерная химия, он пишет: «Пока что методы использования энергии ядра атома еще не разработаны, но затруднения будут быстро преодолены. Уже сейчас можно предположительно набросать следующую схему: бомбардировка ядра алюминия альфа-частицами даст протоны высокой энергии; бомбардировка ядра лития протонами даст альфа-частицы высокой энергии. Если же бомбардировать смесь алюминия и лития протонами, то можно будет получить процесс, аналогичный тепловому процессу, который мы получаем при обыкновенном взрыве, но дающий энергию много раз большую, причем этот процесс, будучи раз вызван, сам поддерживает свое продолжение».

Вы поймете, какой технический переворот сулит эта «современная алхимия», сулят эти новые источники энергии, дающие при разбивке одного единственного атома лития энергию в 16 млн. электрон-вольт, поймете, как важно, чтобы пути нахождения этих источников были в наших руках, а не в руках наших врагов.

Эту картину успехов в области физических исследований можно дополнить успехами по физической химии, по химии органической и неорганической, по многочисленным областям биологических наук, где каждому, кто следит хотя бы по газетам, известны наши достижения в генетике или успехи в области рефлексологии, связанные с именем Павлова и его школы. Работы нашей советской геологии дали уже в этой пятилетке непосредственные результаты открытия новых богатств, неизведанных недр нашей страны.

Нужно наконец отметить, что имеются, правда пока лишь отдельные, случаи, что изобретения наших советских ученых приобретаются заграничными институтами, что заграничные институты оборудуются нашей аппаратурой. Так например можно указать на радиометеограф Молчанова, которым оборудовали колледж Фербенкс в Аляске и Коппернайк Стейшн—в Канаде.

Но если взять в целом состояние научного исследования в естествознании, то, несмотря на эти громадные достижения, мы все же еще имеем громадное отставание теории от требований практики нашего социалистического строительства. Идейные основы теории зачастую поставляются буржуазной наукой. Это признают сами наши передовые ученые и ощущают это как недостаток, чувствуя, что этот недостаток должен быть преодолен, что это положение должно быть изменено.

Так академик Вавилов в указанной уже статье говорит, что мы все-таки не умеем еще так хорошо, как за границей, выбирать предмет исследования, не умеем еще так метко, как умеют за границей, целиться в избранную нами цель. Далее он заявляет: «В основном взгляды механического материализма—уже пройденный этап, к которому не будет возврата. Вместе с тем борьба мировоззрения диалектического материализма с различными идеалистическими гипертрофиями современной физики еще далеко не закончена. Несомненно, что современная теоретическая физика Запада в своих философских предпосылках носит отпечаток идеалистических течений, несомненно также, что советская физика до сих пор растет на основе круга понятий западной физики. Но научиться брать из зарубежной физики лишь здоровую сердцевину, отбрасывая идеалистическую обертку, можно, только пройдя практическую философскую школу на основе конкретного содержания физики. Этим умением овладевают до сих пор только немногие физики и философы. Внедрение диалектики в физику неотложная, но еще не решенная задача».

Это заявление само по себе свидетельствует о победах марксизма на естественно-научном фронте. Товарищи из Академии наук, крупнейшие экспериментаторы и теоретики, сознают, что на том круге понятий, который им поставляло до сих пор буржуазное естествознание, дальше не уедешь, сознают, что необходима социалистическая реконструкция науки, ее реконструкция на основе диалектического материализма.

Для того чтобы охарактеризовать второй сектор научного фронта, сектор социально-экономических дисциплин, остановимся подробнее на философии.

Для развития философской мысли в Советском союзе важнейшим директивным документом последних лет является постановление Центрального комитета партии от 25 января 1931 г. о журнале «Под знаменем марксизма». Там подведены итоги борьбы на философском фронте с механицизмом и меньшевиствующим идеализмом, там намечены дальнейшие задачи философской работы.

Это решение устанавливает, что журнал «Под знаменем марксизма» являлся групповым органом Деборина, Карева, Стэна и др., не был боевым органом марксизма. Эта группа исходила из непонимания ленинского этапа как новой ступени в развитии философии марксизма, отрывала философию от политики, не проводила во всей своей работе партийности философии и естествознания, воскрешала одну из вреднейших традиций и догм II Интернационала—разрыв между теорией и практикой, скатывалась в ряде важнейших вопросов на позиции меньшевиствующего идеализма.

За прошедшие два года на философском участке была проделана работа по реорганизации наших теоретических журналов, философской учебы, программ высших учебных заведений. Борьба на два фронта, политическая и партийная заостренность, выяснение роли Ленина и Сталина в развитии материалистической диалектики, связь с актуальными проблемами социалистического строительства—вот что красной нитью проходит по всем работам философского фронта за это время.

Для того чтобы глубже оценить положение на философском фронте в нашей стране, посмотрим, как расценивает его наш враг, посмотрим, что он говорит про борьбу партии против меньшевиствующего идеализма и механицизма.

В белогвардейском журнале «Путь» известный Бердяев опубликовал статью, посвященную философии в России. В этой статье Бердяев признает, что «Деборин и его ученики всерьез брали диалектику и изучали логику Гегеля». Бердяев делает гнусные выпады по адресу партии, по поводу того, «что целый ряд писателей, которые некогда считались хорошими авторитетами по части марксизма, оказались виновны в различных ересях: Плеханов, Богданов, Луначарский, Деборин, Бухарин и из немцев—Каутский. Ленин является высшим авторитетом по всем предметам, включая и физику, в которой его взгляды противополагаются «реакционным» теориям Эйнштейна».

Поцелуи Бердяева, Востокова—мистиков разных толков по адресу деборинской школы—прекрасная иллюстрация политического смысла деборинщины как отрыва от практики социалистического строительства.

Проделанная борьба по разоблачению фальсификаторов истории марксистско-ленинской философии еще раз подтвердила, насколько правильно охарактеризовал т. Сталин значение той борьбы на теоретическом фронте, которую провел Ленин по философским вопросам. Дальнейшее глубокое изучение развития марксистской философии, в органической связи с изучением всей истории большевизма, всей истории его борьбы с оппортунизмом представляет собой важнейшую задачу, которая стоит перед нашим философским фронтом.

Задачи дальнейшей борьбы с механицизмом и меньшевиствующим идеализмом не снимаются с порядка дня. За последний период времени имеются литературные выступления явно механистического порядка. В прошлом году мы имели выступление механистов в газете «За индустриализацию», памятен доклад т. Перова, в котором он развернул старые механистические установки. Основные механистические кадры—Варьяш, Тимирязев—до сих пор не признали своих ошибок, а, наоборот, заявляют в своих выступлениях, что решения ЦК партии к ним не относятся, поскольку их фамилии там не указаны.

В то же время ряд других механистов, как Перельман и Сарабьянов, выступили в печати с критикой механистов и своих собственных ошибок и стали на путь общей работы.

Наряду с этим следует отметить ряд открытых идеалистических выступлений, как например академика Вернадского в «Известиях Академии наук» по вопросу о времени и пространстве, ряд мистических статей в журнале Академии наук «Природа», статья Френкеля в журнале «Сорена» с махистскими установками, предисловие Топоркова к новому изданию «Этики» Спинозы, вышедшему в 1932 г. в Соцэкгизе.

Прошло два года после решения ЦК нашей партии, осудившего группу Деборина, Стэна, Карева и др. как меньшевиствующе-идеалистическую. Спрашивается: как они за эти два года перестроились?

К сожалению, приходится констатировать, что т. Деборин ограничился по существу формальным заявлением о своих ошибках через год после постановления ЦК, а в течение второго года он написал одну статью, в 4-м номере «Известий Академии наук» за 1932 г., критику на статью академика Вернадского «Проблема времени в современной науке».

Академик Вернадский рассматривает религию как одну из форм знания, развивает идеалистическую концепцию времени, выражает согласие с французским мистиком Бергсоном, немецким идеалистом Зиммелем. Что представляет собой ответ Деборина?

Деборин выступает против этих открытых прямых идеалистических утверждений, но сам протаскивает завуалированные идеалистические установки. По ряду основных вопросов Деборин повторяет свои старые ошибки, показывая, что он ничему не научился в итоге философской дискуссии. Разъясняя академику Вернадскому различие между идеализмом и материализмом, он пишет: Вернадский не видит, «что материализм тем отличается от идеализма, что он не ограничивается одним логическим анализом своих понятий, а подвергает их исправлению и изменению в соответствии с опытом и наблюдением, учитывая всю совокупность результатов научной мысли». Под этаким определением материализма Деборина подпишется любой позитивист, любой представитель эмпиризма, всякий эмпириокритик, вроде Богданова, да и любой кантианец. Ленин ведь в «Материализме и эмпириокритицизме» разъяснил, что под понятием «опыта» и «соответствия знания с опытом» может скрываться и материализм и идеализм. Но, как ни странно, Деборин «забыл» дать основной коренной признак, отделяющий материализм от идеализма.

Та же самая забывчивость основных работ Ленина, а значит основных марксистских положений наблюдается у т. Деборина и по целому ряду других вопросов, которые он развивает в названной статье. Так например он отождествляет гегелевское, т. е. идеалистическое, понятие единства времени и пространства с марксистским, т. е. материалистическим, пониманием этого единства и т. д. и т. п. Так обстоит дело с т. Дебориным.

Меньшевиствующий идеалист Стэн, который заявлял о своем несогласии с партийной линией по философским вопросам, стал участником контрреволюционной группы Рютина и Слепкова. Это показывает, что в обстановке классовой борьбы меньшевиствующий идеализм, являющийся в основном теоретической базой всех левацких уклонов, логически доведенный до конца, становится просто контрреволюционным меньшевизмом.

Недавно вышло новое издание книжки т. Агола «Витализм и марксизм». Несмотря на то, что т. Агол в предисловии крепко «кроет» меньшевиствующий идеализм, сама книга пополняет прежние ошибки, раскритикованные в философской дискуссии, новыми ошибками, идущими в том же направлении.

Основная по важности группа теоретических вопросов как в области философии, так и в области экономики и в области истории—это разработка закономерностей развития настоящего этапа нашей экономики, социальных сдвигов, особенно процессов, которые происходят в деревне, анализ новых форм классовой борьбы, проблема перевоспитания колхозников и т. п. Нужно сказать, что в теоретической разработке и освещении этих вопросов мы еще крайне отстаем. Между тем гигантские победы, которые одержаны нашей партией, построение фундамента социалистической экономики, выполнение пятилетки в четыре года, создание передовой технической базы, и задачи: реконструкция всего народного хозяйства, уничтожение классов, окончательная ликвидация пережитков капитализма в экономике и сознании людей в период второй пятилетки все это ставит огромные проблемы для теоретической работы.

Январский пленум ЦК, особенно доклад т. Сталина и его выступление по вопросу о работе в деревне, дали программные документы величайшей важности для нашего теоретического фронта. Речь т. Сталина представляет классический документ анализа обстановки с точки зрения

марксистской диалектики. Она представляет собой образец разработки теории материалистической диалектики, вопросов исторического материализма, в тесной связи с практикой социалистического строительства и мировой революции. Тов. Сталин на основе богатейшего практического опыта нашей партии дал здесь теоретическую разработку вопросов о форме и содержании колхозного строя в условиях диктатуры пролетариата, о положении и сознании колхозника и задачах его социалистического перевоспитания, об объективных и субъективных факторах в нашей революции, о соотношении экономики, техники, политики и т. д. и т. п. Отсюда вытекает серьезная задача пропаганды, популяризации и задача теоретической разработки этих боевых вопросов нашей действительности, вопросов диалектики в духе указаний и примера т. Сталина.

На последнем пленуме, анализируя современную обстановку, т. Сталин указал, что классовый враг разгромлен, но еще не добит до конца. Кулак открыто не выступает против колхозов, но под прикрытием признания колхозной формы тем острее борется против колхозного движения. Точно так же и на идеологическом фронте, на теоретическом фронте, на фронте науки идейно разбитый классовый враг будет вести под маской признания марксизма самую ожесточенную борьбу против него.

В своей работе «Пролетарская революция и ренегат Каутский» Ленин бессмертными словами охарактеризовал все новые формы сопротивления классового врага после его поражения, которое наносит ему пролетариат. Ленин говорит: «Переход от капитализма к коммунизму есть целая историческая эпоха. Пока она не закончилась, у эксплоататоров неизбежно остается надежда на реставрацию, а эта н а д е ж д а превращается в п о п ы т к и реставрации. И после первого серьезного поражения, свергнутые эксплоататоры, которые не ожидали своего свержения, не верили в него, не допускали мысли о нем, с удесятеренной энергией, с бешеной страстью, с ненавистью, возросшей во сто крат, бросаются в бой за возвращение отнятого «рая», за их семьи, которые жили так сладко, и которые теперь «простонародная сволочь» осуждает на разорение и нищету (или на «простой» труд...). А за эксплоататорами-капиталистами тянется широкая масса мелкой буржуазии, про которую десятки лет исторического опыта всех стран свидетельствуют, что она шатается и колеблется, сегодня идет за пролетариатом, завтра пугается трудностей переворота, впадает в панику от первого поражения или полупоражения рабочих, нервничает, мечется, хныкает, перебегает из лагеря в лагерь... как наши меньшевики и эсеры»[1]).

Неизбежное обострение классовой борьбы в отдельные моменты на отдельных участках находит и будет находить свое отражение на теоретическом фронте в форме борьбы с марксистским мировоззрением, в форме новых попыток исказить марксистско-ленинскую теорию, в форме проникновения в нашу среду влияний всякого рода реакционных, буржуазных, социал-фашистских идей и теорий. Беспощадный отпор такого рода попыткам, в сочетании с положительной разработкой новейших проблем на базе марксистско-ленинской теории, даст нам возможность продвинуться вперед в деле выполнения директив нашей партии в области политэкономии, истории, философии, естествознания.

Итак на научном фронте и по естественным наукам и по наукам

[1]) Ленин, т. XXIII, стр. 355.

социально-экономическим мы имеем ряд достижений. Но мы не были бы большевиками, если бы мы не видели наших недостатков, не учитывали бы тех трудностей, которые имеются у нас, тех препятствий, которые нам здесь приходится и придется еще преодолевать.

Ни на минуту не забывая о необходимости жесточайшей критики, мы должны все свои усилия, центр своего внимания в научной работе обратить на положительную работу. Мы должны дать во всех областях науки, и в науках естественных и в науках социально-экономических, фундаментальные труды по основным проблемам, мы должны концентрировать наши силы—как подрастающие молодые кадры, так и кадры, уже имеющие определенный научный стаж,—на эту положительную работу. В центре внимания должна стоять органическая разработка отдельных проблем, разработка, которая основывается на солидном изучении фактического материала, на терпеливой постановке эксперимента, на тщательном анализе цифрового материала. В центре внимания должно стоять исследование, которое не гнушается этой кропотливой, черновой работы и не сводится только к повторению общих принципов, к их дальнейшей популяризации, но такое исследование, которое на основании этих общих принципов марксизма-ленинизма разрабатывает специфические методы каждой отдельной науки. Эти методы не могут родиться из одной только марксистско-ленинской методологии, а могут возникнуть на ее основе, но только в лаборатории физика или биолога, в архивах историка, в учетных органах, в конъюнктурных бюро экономиста, одним словом, только за научным станком.

Вреднейшим искажением марксизма-ленинизма являются факты упрощенства как в естественных, так и в общественных науках, когда материалистическую диалектику рассматривают как шаблон, по которому можно кроить любую науку, не изучая объективной действительности ее закономерностей, ее конкретных данных, подменяя все их бесконечное многообразие плохо переваренными тремя основными законами диалектики, несколькими избитыми цитатами и трескучей фразой. С этим необходимо покончить решительно и бесповоротно.

Нужно сказать, что иногда бывали случаи, что критиковали рубя с плеча, что бывали перегибы в критике, случаи, когда критика была недостаточно серьезный, и вместо того чтобы она помогала товарищам исправлять ошибки—отталкивала их. Да и до сих пор есть товарищи, не понимающие, что тех ученых (созревших или только еще начинающих), которые сделали ошибку, нужно поправить беспощадно, без примиренчества, указать им на их ошибки, но что не надо их отталкивать, а надо привлекать их к работе, создавая для них такую обстановку, чтобы они имели возможность включиться в наши ряды. С другой стороны, те, кто ошибался, должны знать, что никуда не годится стоять в стороне, держать кулак в кармане и ожидать, «как вы там без нас управитесь». А дело подлинного советского ученого, и тем более ученого-партийца, который ошибся и которого поправили, это дело доказать не декларациями, а творческой работой, что он осознает свои ошибки и исправляет их тем, что делает все, чтобы дать партии и нашей стране положительные труды.

Первейшая, главнейшая задача нашей науки—перейти к периоду, который создаст новые, положительные, фундаментальные исследовательские марксистско-ленинские работы в важнейших областях знания.

3. МЕЖДУНАРОДНОЕ ЗНАЧЕНИЕ НАШИХ ДОСТИЖЕНИЙ НА ФРОНТЕ НАУКИ

Мы в нашей стране на фронте науки имеем громадные достижения, громадный количественный и качественный рост, но оценка этих достижений была бы не полна, если бы мы не сопоставили их с развитием науки в капиталистических странах и не сделали бы вывода о международном значении науки в СССР.

По газетам хорошо известны многочисленные заявления буржуазных ученых о бедственном положении буржуазной науки.

Так в петиции группы германских ученых к президенту Гинденбургу говорится: «Изменение экономического положения за последние два года роковым образом угрожает положить конец развитию наук и тем самым привести не только к застою, но и свести на-нет все то, что было начато с расчетом на дальнейшее развитие... Мы просим Ваше превосходительство не отказать нам в Вашей помощи и содействии в момент, когда дело идет о сохранении научно-исследовательской работы...»

Все знают также о реакционных настроениях, господствующих среди большинства буржуазных ученых, о все умножающихся высказываниях их в пользу религии и мистицизма.

Суммируя эти высказывания, английский философ Бертран Рэссель в недавно вышедшей книге «Перспективы науки» пишет, имея в виду торжественное собрание Британской ассоциации наук: «Недавно основные кадры выдающихся физиков и некоторые из знаменитых биологов сделали заявление, утверждающее, что новейшие завоевания науки опровергли старый материализм и содействуют восстановлению религиозных истин... То, что они заявили для поддержки традиционных религиозных верований, они сделали не в качестве ученых, а скорее в качестве добрых граждан, заботящихся о защите добродетели и собственности. Война и русская революция превратили всех трусливых людей в консерваторов, а профессора обычно боязливы по темпераменту...»

Теперь можно сказать, что исторический путь буржуазной науки завершен. Если Маркс в «Коммунистическом манифесте» говорил, что буржуазия играла в истории в высшей степени революционную роль, что менее чем за сто лет своего господства она создала более могущественные и более грандиозные производительные силы, чем все предшествующие поколения вместе взятые, если рыцарь наживы написал на своем щите: «Прогресс и наука», то теперь не один Освальд Шпенглер, не один Бергсон, не один Чейз, а многочисленные философы, экономисты, историки, естественники, инженеры, беллетристы Германии, Англии, Франции, Соединенных штатов в один голос утверждают, что спасение человечества—в возврате от техники к природе, от науки к религии.

Основное современное «научное» воззрение реакционного большинства буржуазии можно сжато охарактеризовать так: астрономами делаются выводы, что мир разлагается, что близится конец мира, что существуют потусторонние непознаваемые миры.

Физиками делаются выводы, что закон причинности не действителен, что в мире господствует случайность, что миром руководит провидение.

В биологии находят таинственные движущие силы в организме, отрицают эволюционное учение, отрицают развитие от обезьяны к человеку и проповедуют развитие от человека к обезьяне.

Будущее человеческого общества рисуется как мрачная картина разрушения всей цивилизации в войне неслыханной разрушительной силы, от которой на земле останутся только развалины, дикие и полудикие страны.

Вот так выглядит деградация буржуазной науки.

И прав Кильпатрик, известный американский педагог, заявляя по этому поводу: «Мы можем конечно закрывать глаза на все это, хотя многие так и делают, но загнивание капитализма, основ нашего общества от этого не прекратится».

До чего смешно при этих обстоятельствах читать, как некоторые буржуазные ученые и инженеры с поистине детской наивностью обращаются с увещеваниями к руководителям капиталистического строя, как это например сделал согласно последнему номеру английского журнала «Нейчур» проф. Финдлей в речи перед Манчестерским химическим обществом, предлагая магнатам капитализма такой рецепт: «Уступите нам, ученым, место, дайте нам возможность руководить обществом, тогда не будет крушений конференций по разоружению, тогда не будет вот этого жесточайшего кризиса, безработицы и т. п. Мы, ученые, позаботимся, чтобы все было поставлено на научную ногу, чтобы каждый работал всего два часа в день, и этого будет хватать для того, чтобы создать для всех людей жизнь в полном довольствии!»

До чего жалки эти возомнившие техники и ученые, полагающие, что миллионеры и миллиардеры хорошенько подумают и откажутся от своих прибылей, добровольно передадут власть в руки ученых, что осуществится буржуазная утопия «технократии». Между тем, пока они мечтают, наука капиталистических стран продолжает работать для создания новых прибылей и работать усиленными темпами для подготовки войны против Советского союза, войны, являющейся в глазах капиталистов единственным выходом из кризиса, единственным выходом из тупика, в который зашел капиталистический мир.

Итак и на фронте науки полный антагонизм в динамике двух миров: деградация научной мысли, кризис упадка в науке капиталистических стран и колоссальный размах вширь и вглубь, расцвет всех отраслей науки в стране социализма.

На данном этапе империализма кризис теоретического естествознания на Западе идет несравненно более быстрыми темпами, открыто обнажает гниль философских концепций большинства естественников, с необыкновенной резкостью суживает самую материальную базу науки. В кризисе современного естествознания нельзя не видеть нового качества. Вот упадок и деградация научной мысли охарактеризованы в постановлении январского пленума, которое гласит: «Закрываются научные институты, растет безработица кадров и деквалификация их, уменьшается подготовка научных кадров, все большее распространение получают теории» ненужности прогресса науки и техники, наблюдается деградация научной мысли».

Вся деградация научной мысли, этот упадок буржуазной науки не опровергаются конечно отдельными хотя бы даже крупными открытиями, которые имеют место; наоборот, эти открытия только еще больше увеличивают состояние хаоса буржуазной научной мысли.

Совершенно ясно также, что при таком характере кризиса науки в капиталистических странах те наиболее передовые ученые капитали-

стических стран, которые способны вылезть из футляра своей узкой специальности, способны подняться над классовыми предрассудками, предрассудками своей буржуазной среды, обращают свои взоры к нашей советской науке. Совершенно ясно, что те ростки материализма или даже ростки диалектического материализма, которые стихийно рождает современное естествознание, рождает наука в капиталистических странах, находят единственную благоприятную почву в нашем Советском союзе.

Поэтому неудивительно, что из стран капитала все больше и больше слышатся голоса, обращающиеся к нам, предлагающие нам свои работы, что оттуда приезжают к нам, чтобы здесь читать свои лекции, включиться в нашу научно-исследовательскую работу.

За последние два-три года на любом международном конгрессе по любой отрасли науки, где участвуют наши советские ученые, как правило, образуется более или менее оформленное левое крыло, работающее в контакте с нашей советской делегацией, причем не только в смысле политического сближения, но и в смысле желания совместной разработки основных проблем данной науки с точки зрения нашего мировоззрения.

Все это говорит о том, что стихийные ростки материализма, вырастающие из естествознания, из науки на Западе, смогут по крайней мере в данной ситуации перерасти в последовательный, т. е. в диалектический, материализм только у нас, в нашем Советском союзе. Так же как наша марксистско-ленинская экономика, история, философия, так и наше естествознание есть центр притяжения для всего того, что появляется и появится материалистического в отдельных отраслях науки на Западе.

4. БОРЬБА ПАРТИИ ЗА ПАРТИЙНОСТЬ НАУКИ

Всех наших завоеваний на научном фронте мы достигли под руководством нашей большевистской партии. Мы их достигли не только потому, что наша партия проводит политику «усиленной материальной поддержки государством развития науки в Советском союзе», но прежде всего потому, что наша партия своей программой и всей своей деятельностью защищает ленинский принцип партийности науки, распространяет и разрабатывает единственно научное революционное мировоззрение пролетариата—марксизм-ленинизм.

Эта творческая, созидательная мощь нашей партии как партии воинствующего материализма с наибольшей силой воплощается в вожде мирового коммунистического движения—т. Сталине. Разработанное Марксом и Энгельсом учение, обогащенное и развитое Лениным, получает в работах Сталина дальнейшее развитие.

Маркс и Энгельс разработали теорию трудовой стоимости и теорию прибавочной стоимости, они создали исторический материализм и диалектический материализм—философию пролетариата. О том, что марксизм дал нового в учении о классовой борьбе, которая является сердцевиной исторического материализма, Маркс говорит сам в письме к Вейдемейеру:

«То, что я сделал нового, состояло в доказательстве следующего:

1) что существование классов связано лишь с определенными историческими формами борьбы развивающегося производства...

2) что классовая борьба неизбежно ведет к диктатуре пролетариата;

3) что эта диктатура сама составляет лишь переход к уничтожению всяких классов и к установлению общественного строя, в котором не будет места делению на классы»[1]).

В эпоху империализма и пролетарских революций Ленин продолжал разработку учения Маркса. Он не прибавил ни одного нового принципа к учению Маркса и Энгельса, ибо учение Маркса и Энгельса не нуждается в добавочных принципах, но он развил марксово учение применительно к новой исторической эпохе.

Тов. Сталин в беседе с первой американской рабочей делегацией в сжатой форме формулирует то, что было дано Лениным, развившим дальше учение Маркса:

1) Ленин разработал проблему монополистического капитализма, вопрос об империализме как новой фазе капитализма.

2) Ленин разработал вопрос о диктатуре пролетариата как о высшем типе демократии при классовом обществе, вопрос о Советской власти как форме диктатуры пролетариата.

3) Ленин дал нам учение о формах и способах успешного строительства социализма, а именно: учение о возможности построения полного социалистического общества в одной стране, о нэпе как конкретном пути этого построения.

4) Он разработал вопрос о гегемонии пролетариата в революции.

5) Ленин развил национально-колониальный вопрос в стройную систему взглядов, связал его с вопросом о свержении империализма.

6) Он разработал вопрос о партии пролетариата как о высшей форме классовой организации, показал, что партия есть «направляющая сила в системе диктатуры пролетариата», разработал вопрос об единстве партии и о партийной дисциплине.

Сюда необходимо добавить все то, что сделано Лениным в области философии.

«Не кто иной, как Ленин, взялся за выполнение серьезнейшей задачи обобщения по материалистической философии наиболее важного из того, что дано наукой за период от Энгельса до Ленина, и всесторонней критики антиматериалистических течений среди марксистов. Энгельс говорил, что «материализму приходится принимать новый вид с каждым новым великим открытием». Известно, что эту задачу выполнил для своего времени не кто иной, как Ленин, в своей замечательной книге «Материализм и эмпириокритицизм». Известно, что Плеханов, любивший потешаться над «беззаботностью» Ленина насчет философии, не решился даже серьезно приступить к выполнению такой задачи»[2]).

Так же как Ленин развил учение Маркса для эпохи империализма и пролетарских революций, так Сталин развил учение Маркса и Ленина для нового периода, для периода развернутого социалистического строительства.

Тов. Сталин определил конец восстановительного периода и начало периода реконструкции, дал анализ своеобразия этого периода нэпа.

Тов. Сталин разработал во всей конкретности ленинскую идею социалистического планирования.

Тов. Сталин наметил, начиная от заложения экономического фун-

[1]) Маркс и Энгельс, Письма, стр. 68, Партиздат, 1932 г.

[2]) Сталин, Вопросы ленинизма, стр. 17.

дамента социализма, пути к полному социалистическому обществу в условиях обостренной классовой борьбы.

Применяя выражение т. Сталина, которое он употребил относительно Ленина, можно сказать, что т. Сталин раскрыл скобки в формулах, которые были даны Лениным, и вывел новые формулы борьбы для нашей эпохи, формулы, ведущие к победе социализма в нашей стране.

Общие принципы индустриализации разработаны в стройное учение об индустриализации с тяжелой промышленностью во главе, с машинной индустрией как ведущей. Это сделано т. Сталиным.

Производственная смычка пролетариата и крестьянства была разработана т. Сталиным.

Коллективизация сельского хозяйства, ликвидация кулачества как класса—эти вопросы были разработаны в стройную систему взглядов т. Сталиным.

Вопросы организации нашего Советского государства как государства, состоящего из федеративных социалистических республик, а в связи с этим вопросы национальной культуры были разработаны т. Сталиным.

Тов. Сталин в своих работах дал теоретическую разработку таких основных философских категорий, как теория и практика, возможность и действительность, форма и содержание, субъективный и объективный факторы.

Но т. Сталин дает для развития науки не только теоретические работы, но непосредственно влияет на продвижение научной мысли, на продвижение теории в нашей стране.

У нас не было ни одной научной дискуссии за это время, ни одного серьезного события на фронте науки, которое не проходило бы под непосредственным руководством т. Сталина.

Чтобы прекратить схоластическую дискуссию на экономическом фронте, чтобы повернуть экономический фронт от рубинщины и механицизма на изучение проблем советской экономики и экономики империализма, потребовалось личное вмешательство т. Сталина.

На аграрном фронте, чтобы повернуть этот фронт к насущным теоретическим и практическим задачам, потребовалось, чтобы выступил т. Сталин.

Чтобы поднять философскую дискуссию на высшую ступень, покончить с меньшевиствующим идеализмом и механицизмом, чтобы дать партийное направление философской науке, потребовалась беседа т. Сталина с бюро ячейки ИКП философии и естествознания 9 декабря 1930 г.

Чтобы предохранить нас от продолжения грубейших ошибок на историческом фронте, в особенности на столь важном участке, как история партии, потребовалось неоднократное вмешательство т. Сталина.

Чтобы повернуть литературный фронт на широкую дорогу советской литературы, потребовалось вмешательство т. Сталина.

Даже в такой области, как медицина, чтобы создать Институт экспериментальной медицины, который от старой рутинной полукустарной медицины повернул бы советскую медицину и психоневрологию на новые пути, когда медицина использует все достижения современной физики, современной химии, современной биологии,—потребовались вмешательство, творческая инициатива т. Сталина.

Так т. Сталин конкретно и в деталях руководит сложнейшим делом развития науки в нашей стране.

В лице т. Сталина мы имеем не только гениального политического вождя партии и международного рабочего движения, но имеем величайшего теоретика, величайшего мыслителя. Само собой разумеется, мы не беремся дать полную оценку того значения, которое имеет работа т. Сталина для развития науки. Данный нами абрис крайне неполон и несовершенен.

Для нашей науки в Советском союзе имеет значение серьезной проверки 14-е марта 1933 г.—50-летняя годовщина смерти Маркса. Эту годовщину встречаем не только мы в Советском союзе, ее встречает международный пролетариат, ее старается использовать международная социал-демократия. Германская социал-демократия намеревалась приурочить к этой годовщине свой партейтаг, где докладчиком о Марксе был назначен не кто другой, как Рудольф Гильфердинг. В то же самое время, когда германская социал-демократия с каждым днем, и каждым часом и в теории и на практике предает учение Маркса, предает рабочий класс, она делает все для того, чтобы превратить годовщину смерти Маркса в новый обман рабочего класса, выставляя себя—социал-фашизм—как единственного наследника Маркса, единственного хранителя его учения.

Карл Каутский недавно выпустил первый том нового труда «Война и демократия»—историческое исследование их взаимоотношений, начиная от господства Нидерландов до наших дней. Задача этого труда заключается в том, чтобы всячески опорочить пролетарскую революцию, показать прогрессивность буржуазной демократии, оправдать надвигающуюся новую империалистическую войну, подготовить умы для ее восприятия. В связи с 60-летием со дня рождения социал-фашиста философа Макса Адлера социал-демократическая пресса отметила огромные заслуги этого «теоретика» в борьбе с материализмом, в борьбе с революционным содержанием марксистского учения. В этом отношении крайне характерна статья Брауналя в январском номере журнала «Кампф». Статья воспевает заслуги Макса Адлера—«этого великого учителя второго социалистического поколения предвоенного и послевоенного времени», выбросившего знаменитый пароль—«назад от материализма к марксизму», так много сделавшего в смысле переделки марксизма под кантианство.

Брауналь подчеркивает особое значение работ Макса Адлера в связи с тем, что материализм является господствующей идеологией в Советском союзе. Он пишет буквально следующее: «Весь этот ход мыслей, этот острый разрыв между материалистической философией и марксистской общественной наукой является в настоящее время настолько доказанным и само собой разумеющимся, что приходится удивляться, когда об этом еще раз напоминают. Однако надо помнить, что в крайне важной стране для марксистского рабочего движения марксизм в его духовной форме в существенном остался таким, каким в Средней Европе он Максом Адлером был уничтожен, а именно в России, где везде проповедуется тождество философского материализма с марксизмом и оно является составной частью официальной государственной науки, следовательно монопольно господствует на поле битвы». А это происходит в то время, когда оголенная, неистовствующая фашистская диктатура топит в море крови германский рабочий класс. В то время когда банкротство «демократической» теории II Интернационала стало очевидным, когда буржуазия пинком

сапога вышвыривает отслуживших лакеев, эти люди смеют еще делать попытки торговаться за признание их теоретических принципов, как это делает Фридрих Адлер в февральском номере «Кампф», смеют прикрываться марксовым именем.

Поистине пророчеством звучат слова Энгельса по адресу германской социал-демократии, написанные в согласии с Марксом в письме к Бебелю в 1879 г.: «Впрочем, мировая история идет своим путем, не считаясь с этими мудрыми и умеренными филистерами. В России через несколько месяцев дела должны принять решительный оборот. Одно из двух: либо падет самодержавие, и тогда тотчас же, с падением главного оплота реакции, по Европе повеет другим ветром, либо—разразится европейская война, и в неизбежной борьбе всякого народа за свое национальное бытие эта война похоронит и нынешнюю германскую партию... Новая партия, которая, в конце концов, должна была бы создаться в результате всего этого, освободилась бы во всех европейских странах от всяческих колебаний и мелочности, которые теперь повсюду тормозят движение» [1]).

Эти новые партии созданы, это партии Коммунистического интернационала во главе с нашей большевистской партией. Годовщина смерти Маркса является триумфом нашей партии, триумфом революционного марксизма. Вместе с тем это проверка для нашей советской науки и в первую голову для наших марксистско-ленинских учреждений.

15 лет диктатуры пролетариата силой всемирно-исторических фактов подтвердили всю правоту учения Маркса, Энгельса, Ленина.

Марксизм-ленинизм имеет за собой такой несокрушимый аргумент, как победоносная Октябрьская революция, которую совершила наша партия под руководством Ленина.

Марксизм-ленинизм имеет за собой такой несокрушимый аргумент, как победоносное завершение пятилетки, которого достигла наша партия под руководством т. Сталина.

Марксизм-ленинизм восторжествовал целиком и полностью, и теоретически и практически в великом строительстве социалистического общества, он идет к полному торжеству на всем земном шаре.

Но «марксизм завоевал свое всемирно-историческое значение как идеология революционного пролетариата тем, что он, марксизм, отнюдь не отбросил ценнейшие завоевания буржуазной эпохи, а, напротив, усвоил и переработал все, что было ценного в более чем двухтысячелетнем развитии человеческой мысли и культуры». Усвоение этих запасов знания, их переработка на основе партийности остается и впредь руководящим принципом марксистской науки.

4 февраля 1930 г., т. Сталин в своей речи «О задачах хозяйственников» заявил: «Мы отстали от передовых стран на 50—100 лет. Мы должны пробежать это расстояние в 10 лет. Либо мы сделаем это, либо нас сомнут» [2]).

Уже теперь можно сказать, что за истекшую первую пятилетку мы пробежали немалую долю этого расстояния. Мы все чувствуем, как для нашего времени верны слова о том, что в революционную эпоху 20 лет равняются одному дню великих исторических событий. Но впереди

[1]) «Архив Маркса и Энгельса», т. I (VI), стр. 169—170.
[2]) Сталин, Вопросы ленинизма, стр. 584.

остается еще много. Многое нам нужно еще сделать, чтобы изучить технику, чтобы овладеть наукой.

Эти задачи стоят не только перед рабочими массами, они стоят и перед нашими научными работниками. И чем выше поднимаемся по образовательной лестнице, тем сложнее и труднее становится задача освоения. Ведь тем глубже должны овладеть наукой научные работники, овладеть материалом буржуазной науки и включиться в переработку науки на основе диалектического материализма. Это задача исключительно трудная, требующая от работников науки не меньшего пафоса освоения, чем тот, который по призыву своего вождя развивает наш пролетариат во второе пятилетие.

Тов. Сталин закончил свою историческую речь незабываемыми словами: «Говорят, что трудно овладеть техникой. Неверно! Нет таких крепостей, которых большевики не могли бы взять. Мы решили ряд труднейших задач. Мы свергли капитализм. Мы взяли власть. Мы построили крупнейшую социалистическую индустрию. Мы повернули середняка на путь социализма. Самое важное с точки зрения строительства мы уже сделали. Нам осталось немного: изучить технику, овладеть наукой. И когда мы сделаем это, у нас пойдут такие темпы, о которых мы не смеем и мечтать. И мы это сделаем, если захотим этого по-настоящему!» [1]).

Да, мы это сделаем: мы изучим технику, овладеем наукой, и перестроим ее. Тогда и наша советская наука, ставшая социалистической наукой, будет передовым отрядом, ударной бригадой, в которую включатся лучшие передовые ученые капиталистических стран, ибо социалистическая наука станет единственной наукой человечества.

Этого мы достигнем: шагает же во главе нашей бригады такой бригадир, как т. Сталин.

[1]) Сталин, Вопросы ленинизма, стр. 585.

О РАБОТЕ МАРКСА НАД ВОПРОСАМИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

П. ПОВИНСКИЙ

Каждый шаг на пути побед социализма в нашей стране говорит реально, практически, всем своим существом, что дело, за которое боролись так последовательно до конца своих дней великие гиганты мысли и борьбы—Маркс, Энгельс и Ленин,—это дело, для которого нет и не будет непреодолимых преград. Оно живет, развивается, обогащается новым содержанием, всем опытом революционной борьбы и побед социализма.

Теория борьбы и побед рабочего класса делается все большим достоянием трудящихся.

В нашей стране марксистско-ленинская теория, разоблачая ревизионистские извращения марксизма, выражающие в идеологической форме сопротивление уничтожаемых победоносным развитием социализма капиталистических элементов, разбивая идеализм как открытое знамя классового врага, все больше вооружает широчайшие массы людей труда и науки в борьбе за дело социализма.

Растущие из рабочего класса кадры молодых специалистов овладевают наследством Маркса, Энгельса, Ленина и, руководствуясь им, строят свою работу.

Научные работники в различных областях естествознания воспитываются на «Анти-Дюринге», «Диалектике природы», «Материализме и эмпириокритицизме», «Капитале», «Ленинских сборниках», «Вопросах ленинизма».

Для ряда крупнейших представителей науки, связавших дело своей

науки с делом социализма, работы классиков марксизма становятся настольными книгами, из которых они все больше черпают данные для сознательной борьбы за исторические задачи нашего строительства.

Работы классиков марксизма, посвященные вопросам теории и естествознания в частности, являются не только общим источником для формирования марксистского мировоззрения и диалектико-материалистического естествознания, они дают также богатейший материал для разработки различных областей естествознания. Овладение всем положительным материалом наук своего времени дало возможность классикам марксизма разработать вопросы диалектики природы в целом, и отдельных форм развития материи. Среди необъятного материала истории науки и современного им естествознания Маркс, Энгельс, Ленин, пользуясь диалектическим методом, умели находить основное, решающее.

Они брали основные тенденции науки, ее содержание и в океане имен и фактов зорким глазом находили путь к основному, отбрасывая «авторитеты», пропагандируемые плоским мышлением, и в то же время умели оценивать все значительное, ценное. Они не связывали себя оковами хронологии, превращавшими историю науки в кунсткамеру беспорядочно собранных экспонатов. Они подходили к вопросам науки конкретно, связывая их анализ со всей совокупностью исторических условий. Классиков марксизма отличает то, что подчеркивал так выпукло В. И. Ленин, когда он говорил, имея в виду в данном случае переписку с Зорге, что письма Маркса и Энгельса представляют собой «образчик материалистической диалектики, уменье выдвинуть на первый план и подчеркнуть различные пункты, различные стороны вопроса в применении к конкретным особенностям тех или иных политических и экономических условий»[1]).

В силу всего этого надо сказать, что Маркс и Энгельс дали не только богатейшие основы и реальное содержание для разработки вопросов марксистской истории естествознания, они показали также примеры анализа его отдельных областей, отдельных вопросов и работ отдельных естествоиспытателей. Они подчеркивали исключительное историческое значение Шлейдена как основоположника клеточной теории наряду со Шванном, хотя в философии Шлейден был кантианцем; они оценили исключительное величие теории Дарвина, хотя он был филистером и не разбирался в вопросах общественно-исторического характера; Вирхова, которого Маркс и Энгельс разоблачали как почтенного буржуа, вместе с тем выделяли как человека, сыгравшего значительную роль в науке.

Маркс и Энгельс производили раскопки в покрытом пылью истории огромном материале и создавали естественную классификацию имен и фактов, вскрывая противоречивость объективного развития. Сосредоточиваясь над вещами, лежащими у других «под носом» и остававшимися незамеченными, Маркс и Энгельс показывали и доказывали, что эта близорукость не случайна, что это есть принципиальный подход буржуазной мысли, ограниченной и связанной классовыми, партийными интересами.

Они ставили себе задачей открывать, делать жизненным ценное, положительное содержание науки. Об этом свидетельствуют хотя бы следую-

[1]) Ленин, т. XI, стр. 162.

щие слова Энгельса: «Относительно первобытного состояния общества существует капитальный труд, имеющий такое же решающее значение, как Дарвин в биологии; открыл его, конечно, опять-таки Маркс: это—Морган, «Первобытное общество», 1877 г. Маркс говорил об этой книге, но мне тогда было не до этого, а он к ней больше никогда не возвращался; он, очевидно, был ею доволен, потому что, судя по очень подробным извлечениям из этой книги, он сам хотел познакомить с ней немцев». Далее Энгельс подчеркивает, в чем значение этой работы и каково его отношение к ней: «Морган в границах своего предмета самостоятельно открыл во второй раз марксово материалистическое понимание истории и заканчивает в отношении современного общества непосредственно-коммунистическими требованиями... Эти господа («Тайдор, Леббок и К°.—*И. Н.*) замалчивают здесь книгу по мере своих сил» [1]).

Умея находить лучшее, Маркс и Энгельс в то же время сдавали в архив истории ряд имен, которые были довольно видны на поверхности; таково например их отношение к естествоиспытателям—вульгарным материалистам XIX в. Бюхнеру, Молешотту, Фогту. Интересно сравнить, насколько правильнее оценивали Маркс и Энгельс этих людей, чем некоторые крупнейшие люди их времени.

Так например Герцен, о котором В. И. Ленин писал, что «он вплотную подошел к диалектическому материализму и остановился перед историческим материализмом»,—очень высоко оценивает Фогта. «Страстный поклонник красот природы,—пишет о нем Герцен,—неутомимый работник в науке, он все делал необыкновенно легко и удачно: вовсе не сухой ученый, а художник в своем деле, он им наслаждался, радикал по темпераменту, реалист по организации и гуманный человек по ясному и добродушно-ироническому взгляду, он жил именно в той жизненной среде, к которой единственно идут дантовские слова «Qui ê l'uomofelice». Он прожил жизнь деятельно и беззаботно, нигде не отставая, везде в первом ряду; не боясь горьких истин, он так же пристально всматривался в людей, как в полипы, медузы, ничего не требуя ни от тех, ни от других, кроме того, что они могут дать...

...Несмотря на то, что мы шли с разных сторон и разными путями, мы встретились на трезвом совершеннолетии в науке» [2]).

Насколько хвалебна эта оценка господина Фогта со стороны Герцена, величайшего мыслителя своего времени, настолько последовательно в то же время разоблачали Маркс и Энгельс этого «гуманиста». Записки Герцена о Фогте относятся к 1850 г., а в 1859 г. Герцен, зная о критике Фогта со стороны Маркса, писал: «Фогту недурно хорошенько обругать своих обвинителей».

Оговариваемся, что этот вопрос требует особого разбора, и здесь мы ограничиваемся лишь некоторыми моментами в соответствии с необходимостью подчеркнуть принципиальные стороны подхода Маркса и Энгельса к естествознанию и естествоиспытателям. Добавим, что Маркс и Энгельс оценивали Фогта не только как политика, но и как естествоиспытателя; впрочем в этой связи и Герцен при всем добром отношении к Фогту подчеркивает всю бедность фогтовского мировоззрения, ограниченность

[1]) «Архив Маркса и Энгельса», т. I (VI), стр. 247.
[2]) А. И. Герцен, Былое и думы, т. II, стр. 156—157.

его горизонта. Герцен пишет: «...я бросился с жадностью на философию, от которой Фогт чувствовал неопреодолимое отвращение».

Возвращаясь к вопросу о работе Маркса и Энгельса над вопросами естествознания, следует сказать, что роль Энгельса в разработке естествознания более известна; а иногда даже считают, что область естественных наук была специальностью Энгельса. Однако уже опубликованный материал говорит об исключительном и разностороннем внимании Маркса к вопросам естествознания. Неудивительно, что Энгельс руководствовался мнением Маркса; когда он писал «Анти-Дюринг», он дал Марксу прочесть всю рукопись перед ее опубликованием.

Конечно центр тяжести работ Маркса лежал в плоскости социально-экономических вопросов, вопросы естествознания шире разработаны Энгельсом, однако, как мы указывали, не мало опубликовано рукописей Маркса, а также его переписки, свидетельствующих о том, насколько глубоко, разностороннее занят был Маркс на протяжении многих лет естествознанием, насколько значительно его наследство сверх того, что им сделано в его общих работах и в частности в «Капитале», где Маркс дал исключительный по богатству анализ социально-экономических и классовых корней развития естествознания, дал решающие установки в разработке марксистской истории естествознания, показал его роль, значение и задачи в общественно-историческом процессе.

Еще 19-летний Маркс указывает в письме к отцу от 1837 г., что он «познакомился до известной меры с естествознанием», затем, особенно с начала 50-х годов, он изучает естествознание, останавливаясь на различных его областях, а последние письма Маркса говорят о том, что он следил за его состоянием до конца своих дней. Нет сомнений в том, что работа Маркса и Энгельса над «Немецкой идеологией» дает нам исключительное богатство данных для разработки теоретических основ естествознания. Однако сейчас мы имеем в виду использовать данные, которые говорят о внимании Маркса к отдельным вопросам естествознания. Здесь также налицо все богатство связи этих отдельных вопросов с общим мировоззрением и методом Маркса, с его подходом революционного бойца к вопросам науки.

В 1851 г. Маркс пишет Энгельсу о книге Даниэльса по физиологии. Из ответного письма Энгельса можно заключить, что классики марксизма предупреждали Даниэльса не делать обобщающих выводов, поскольку он ограничивался в своих работах сферой психо-физиологии, в этом письме разъясняется, что сами понятия являются выражением общественно-исторических условий, состояния общественного процесса. Реакция людей на те или иные явления обусловлена в конечном счете всей совокупностью данных общественно-экономической формации.

Вот что писал Энгельс: «Ты знаешь, я не читал окончания Даниэльса. Что этот молодец упорно держится за «понятия», как посредствующую связь между людьми, это вполне объяснимо; ты никогда не заставишь от этого отказаться человека, пишущего о физиологии. Он в конце концов всегда спасается при помощи того аргумента, что всякое фактическое явление, воздействующее на человека, вызывает у него понятия и что реакция на эти факты хотя и является во второй инстанции следствием этих фактов, но в первой инстанции это следствие понятий. Против этой формальной логики конечно ничего нельзя возразить, и все зависит от того, какой способ изложения в его рукописи, я его не знаю. Я ду-

маю, что лучше всего было бы ему написать, что он знает, каким ложным толкованиям может быть подвергнута та или другая часть его работы и пусть он их так изменит, чтобы ясно видны были его «подлинные» воззрения»[1]).

Таким образом, в соответствии с вышеуказанным, Энгельс предупреждает, что имеется опасность идеалистического истолкования Даниэльса, скользкость его формулировок может превратить понятие в демиурга действительности, что Даниэльс при данном положении остается в пределах формальной логики, что он наконец в узких пределах физиологии пытается развернуть выходящую за эти пределы проблему связи между людьми.

Спустя месяц Маркс запрашивает Энгельса уже о другом, о применении электричества к агрикультуре, здесь его же интересует применение науки к развитию производительных сил. Тут уже иная плоскость подхода к вопросам естествознания, и опять налицо умение практически, реально следить за состоянием науки.

«Я посылаю тебе,—пишет Маркс Энгельсу,—вслед за этим копию статьи о применении электричества к агрикультуре на английском языке. Будь столь добр и ответь мне сейчас же: 1) каково твое мнение об этой вещи; 2) объясни мне эту историю, так как я не вполне в ней разбираюсь...»[2]).

Ответ Энгельса, разъясняющий Марксу суть статьи, характерен также тем, что он свидетельствует лишний раз о научной тщательности, свойственной Марксу и Энгельсу, он же подчеркивает исключительное внимание их к вопросам друг друга.

«Впрочем,—заканчивает Энгельс письмо,—об этой вещи нельзя судить, пока она не будет испытана и не будут иметься налицо результаты, поэтому скажи мне, где я могу найти более подробные указания об этом предмете»[3]).

Интерес Маркса и Энгельса к вопросам агрикультуры не случаен, он связан с необходимостью обогатиться материалом, который будет реализован в разработке соответствующих вопросов «Капитала». В то же время надо подчеркнуть, что работа над вопросами естествознания носила не просто подсобный характер, она являлась органическим содержанием в разработке вопросов марксизма.

Период 1851 г. уже приводит Маркса к выводам, что «реформа агрикультуры и основанного на ней собственнического свинства должна стать альфой и омегой будущего переворота. Он работает далее специально над агрономией пока для того, как он говорит, «чтобы получить хоть некоторое представление об этом предмете». Маркс однако неослабно продолжал эту работу, все время следя за успехами и выводами агрономии, и агрохимии в частности. Уже закончив в декабре 1865 г. I том «Капитала», он садится снова за вопросы агрохимии в силу того, что появился новый научный материал, подтверждающий опять-таки, как подчеркивает Маркс, его выводы.

«Что касается «проклятой» книги,—пишет Маркс о «Капитале»,—то

---

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXI, стр. 187. Подчеркнуто мною. — *И. Ш.*
[2]) Там же, стр. 195.
[3]) Там же, стр. 201.

дело обстоит так: она была готова в конце декабря. Один только отдел о земельной ренте, предпоследняя глава, составляет, в теперешнем виде, почти книгу. Днем я ходил в музей, а по ночам писал. Новая земледельческая химия в Германии, специально Либих и Шенбейн, которые важнее для этого дела, чем все экономисты, вместе взятые; с другой стороны, огромный материал, созданный французами со времени моих последних занятий этим предметом,—все это мне пришлось теперь проштудировать. Я закончил свои теоретические расследования земельной ренты два года тому назад. А как раз за это время появилось много нового, вполне, впрочем, подтверждающего мою теорию»[1]).

В частности работы Либиха послужили естественно-научной основой для развития Марксом его тезиса о том, что всякий прогресс в капиталистическом земледелии есть прогресс в разрушении постоянных источников плодородия. Маркс особо отмечает историческую роль и значение работ Либиха, которые он использовал, зная чего в них искать и какие из них должны быть сделаны выводы. «Выяснения отрицательной стороны современного земледелия, с точки зрения естествознания,—пишет Маркс о Либихе,—представляют одну из бессмертных заслуг Либиха. Его исторические экскурсы в историю земледелия, хотя и не свободные грубых ошибок, тоже бросают свет на некоторые вопросы»[2]).

Однако вслед за этим Маркс, продолжая работать над вопросами земельной ренты, следит далее за новейшими данными в области агрохимии, интересуясь особенно тем материалом, который направлен против либиховской теории истощения почвы; с удовольствием подчеркивает он указания Фрааза, который дал своими работами материал для выводов, что если культура развивается стихийно, а не направляется сознательно, то оставляет после себя пустыню.

В связи с интересующими Маркса вопросами он в 1868 г. просит Энгельса помочь ему получить указания Шорлеммера по этому поводу: «Я хотел бы узнать у Шорлеммера, какая новейшая и лучшая книга (немецкая) по агрономической химии? Затем, как обстоит теперь дело со спором между сторонниками минерального и азотистого удобрения? (С тех пор как я занимался этим в последний раз, в Германии появилось много нового.) Знает ли он что-нибудь о тех новых немецких авторах, которые писали *против* либиховской теории истощения почвы? Известна ли ему теория навозов мюнхенского агронома Фрааза (профессора Мюнхенского университета)? Для главы о земельной ренте я должен по крайней мере to some extent, ознакомиться с новейшими данными по этому вопросу. Так как Шорлеммер—специалист этого дела, то он, вероятно, сможет дать указания»[3]).

Таков пример того, как работал Маркс над вопросами естествознания, обогащая положительным его материалом для разрешения задачи анализа капиталистического общества и уже тогда оценивая пути будущего сознательного применения естествознания на службу социализма.

В 1857 г. между Марксом и Энгельсом ведется оживленная переписка, вызванная с болезнью Энгельса. Здесь достаточно данных для того, чтобы подчеркивать личную их дружбу и заботы друг о друге. Не это

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 325.
[2]) Маркс, Капитал, т. I, стр. 393, примечание.
[3]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 2.

в данном случае привлекает нас остановиться на материале переписки по вопросам медицины. Маркс, заботясь о том, чтобы помочь Энгельсу, советовал Энгельсу лечиться, принимая железо. Характерно, что он для этого засел так основательно за вопросы медицины, что указания Энгельсу делал, «опираясь,—как он пишет,—на всю новейшую французскую, английскую и немецкую литературу». И вот два ответных письма Энгельса говорят об исключительной глубине, с какой Энгельс поставил ряд существеннейших, еще и теперь злободневных, вопросов медицины.

Он подчеркивал, что увлечения железом является очередной модой, сводящей все болезни к одному фактору—недостатку железа,—что не исключает однако целесообразности и его применения. Энгельс поставил далее исключительного значения вопрос о своеобразии одного и того же препарата в зависимости от того, в каком он дается виде; железо например, вводимое в организм в виде пищи, усваивается иначе, чем железо, вводимое как препарат; он подчиняет вопросы лечения необходимости поднять жизнедеятельность организма в целом, сочетая лекарственную помощь с климатическим лечением и гидротерапией, все вместе должно дать действительное улучшение состояния физиологических процессов организма; он указывает, что усвоение лекарственных веществ—это не простая механическая связь с организмом, здесь требуется учет состояния организма, так же, как не безразлично, в каком соединении вводится лекарственное вещество; больше того, Энгельс подчеркивает, что нужно учитывать своеобразие каждого отдельного организма при одном и том же заболевании и своеобразие отдельных периодов болезни. Приведем письмо, подтверждающее вышесказанное:

«Что недостаток железа в крови—о с н о в н а я п р и ч и н а золотухи, это для меня, во всяком случае, ново. Но вопреки всякой литературе несомненно, что с некоторого времени распространяется мода сводить все болезни к недостатку железа в крови—мода, которая начинает уже вызывать реакцию... Что в рыбьем жире одним из главных действующих элементов является между прочим иод—это несомненно, но далеко не единственным. Иод в другом виде отнюдь не дает такого результата. Тут имеется еще хлор и бром, действующие на болезнь прямо или косвенно, а насколько помогают здесь составные части желчи и жидкие жировые кислоты, это еще не установлено...

Повторяю впрочем, что, несмотря на единодушное мнение литературы, я питаю большое недоверие к сведению всех болезней к недостатку железа до тех пор, пока мы не узнаем больше, чем до сих пор, в каком виде железо находится в крови и каково нормальное количество его... Но, admis (если даже допустить.—*Ред.*), что это—основная причина, отсюда еще далеко не следует, что нужно indiscriminate (во что бы то ни стало.—*Ред.*) и сейчас же начать употреблять железо. Железо очень трудно ввести в кровь иначе, как в тех малых количествах, в каких оно находится в обычной пище. Стало быть, если предположить, что особенность моей болезни состоит в неспособности крови усваивать железо из пищи, то еще менее будет она усваивать его из лекарств. Морской воздух и морские купания укрепляют организм так, что кровь снова приобретает эту способность. Она следовательно снова начинает усваивать железо из мяса и хлеба, а так как я ем теперь больше, чем обычно, то и железа усваивается больше. Вот тогда, когда эта способность восстановлена, может быть полезно принимать железо в

виде лекарства, хотя я думаю, что девять десятых его проходит через организм без всякой пользы; но и по «железной теории» употребление железа признается правильным не во всех периодах болезни. А надо еще принять во внимание особенности каждого отдельного случая и конструкцию организма»[1]).

Маркс не возражал собственно против принципиальных установок своего друга, он подчеркивал лишь, что причину его болезни следует видеть в недостатке железа в крови и что лечение железом должно его скорее поставить на ноги.

Однако этот случай не был эпизодом в работах Маркса и Энгельса; они следили за достижениями медицины и восхищались всякий раз, когда им удавалось получать данные о ее успехах. Так в 1882 г. Маркс не забывает в письме к Энгельсу указать, что ему стало известно открытие в том же году Кохом туберкулезной палочки. Он замечает в письме к Энгельсу: «В последнем письме (я не помню точно, непосредственно тебе или Тусси, или Лауре) я писал, что сообщу подробности тебе после свидания с доктором Купеманом. Последнее состоялось 8 мая; он эльзасец, научно (медицински) образован; например, до получения твоего письма сообщил мне об открытии д-ра Коха о бацилле»[2]).

Маркс работал также над вопросами различных областей биологии. В 1864 г., уже знакомый с работами Дарвина, он возвращается снова к вопросам физиологии, занимается морфологией, ограничиваясь пока работами Карпентера и Лорда по физиологии, учением Келликера о тканях, анатомией мозговой и первной системы Шпурцгейма, работами о клетках Шванна и Шлейдена; Маркс указывает, что он собирается основательно поработать над физиологией и анатомией.

Для характеристики указанного периода имеется ряд, к сожалению, неопубликованных пока документов, которые могли бы дать возможность ближе знать, как работал Маркс. Здесь интересно отметить два момента: во-первых, характерно, как Маркс одним штрихом отмечает критику Лордом механистических, вульгарных взглядов френологии и, с другой стороны, подчеркивает религиозность Лорда, которая сказывалась, подрывая силу этой критики. «В «Popular Physiologie» Лорда,— пишет он,—имеется хорошая критика френологии, хотя субъект этот и религиозен»[3]). Во-вторых, этот период работы очевидно дал Марксу материал для того обобщения, которое он сделал в предисловии к I тому «Капитала» от 25 июня 1867 г., где Маркс писал: «Развитое тело легче изучать, чем клеточку тела».

У нас нет данных о том, в какой мере удалось Марксу выполнить свое намерение заняться глубже физиологией и анатомией, однако в связи с работой над «Капиталом» Маркс уделяет им значительное внимание.

Об этом пишет сам Маркс в письме к Энгельсу от 7 декабря 1873 г.[4]).

«В оглавлении «большого труда» де-Папа значится в виде главного отдела второй книги «физиологические данные».

«Анализ рабочей силы и физиологические условия ее существования:

---

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXII, стр. 218—220.
[2]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, тер. 559.
[3]) Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 193.
[4]) В письме имеется текст на французском языке, он дан в русском переводе согласно переводу редакции данного тома переписки.

1) теория Карла Маркса о рабочей силе, труд необходимый и труд прибавочный. Большое значение—экономическое и социальное—этой теории, 2) физиологический анализ того, что Маркс называет трудом, или рабочей силой. Три основные элемента, образующие эту силу: нервная сила, мускульная сила, сила чувствительности». Ты видишь, как это служит ему поводом вторгнуться в область медицины. Отдел заканчивает так:

«14. Каким образом вышеуказанные физиологические данные позволяют нам определить с возможной точностью стоимость рабочей силы, основу всякой меновой стоимости и фундамент всей экономической науки. Последнее похоже на недоразумение. Затем следует теория народонаселения под заглавием: «Данные, полученные благодаря изучению функций воспроизводства». Из оглавления я вижу, что благодаря задержке французского перевода «Капитала» он незнаком с тем, что там содержится, и потому никак не мог усвоить себе его содержание»[1]).

Маркс, как я указывал, значительно раньше проработал книгу Дарвина «Происхождение видов» и относился крайне критически к смешению им общественных и биологических закономерностей.

Об отношениях Маркса и Энгельса к вопросам дарвинизма сейчас подробнее говорить не следует, однако здесь же надо подчеркнуть, насколько Маркс внимательно следил за критикующими Дарвина людьми, как он умел подчеркивать величие Дарвина и подмечать, что критика дарвинизма шла со стороны реакционных сил. Об этом он пишет Энгельсу, делая в письме ироническое замечание по поводу Вирхова, который, выступая против дарвинизма как реакционер, считал себя выше Дарвина. «Господин Вирхов,—пишет Маркс,—как я вчера узнал из supplément (приложения.—*Ред.*) к «Journal de Genève», снова доказал, что он бесконечно выше Дарвина, что он единственный исследователь, а потому также «презирает» органическую химию»[2]). Об этом же свидетельствует и оценка другого ненавистника дарвинизма—беспринципного чиновника академика Флуранса. Маркс пишет о Флурансе, что он «всю свою почти столетнюю жизнь всегда стоял за существующее правительство и попеременно был бонапартистом, легитимистом, орлеанистом и опять бонапартистом. В последние годы своей жизни он еще обратил на себя внимание своей фанатической ненавистью к Дарвину»[3]). Насколько глубоким считали классики марксизма учение Дарвина, свидетельствует то обстоятельство, что уже в 1882 г. Энгельс, давший исключительной глубины анализ основных вопросов дарвинизма, отказывался писать статью о Дарвине: «...пока я не разберусь как следует в этой области и не вернусь опять к естественным наукам, и следовательно к зоологии, об этом не может быть и речи. Если бы я вздумал отделаться общими местами о Дарвине, то это не пошло бы на пользу ни вам, ни мне»[4]).

Вот место, которое с особой яркостью говорит об исключительно ответственном отношении к науке со стороны Маркса и Энгельса.

В процессе своих занятий Маркс изучал и такие области, как астро-

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 428. Подчеркнуто мною, *И. И.*
[2]) Там же, стр. 577.
[3]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 286.
[4]) «Архив Маркса и Энгельса», т. I (VI), стр. 211—212.

номия, геология, палеонтология. Работа Маркса над вопросами математики специально освещается в данном сборнике. Ограничимся указанием на ту высокую оценку, какая дана математическим работам Маркса со стороны Энгельса. «Вчера,—пишет он,—наконец я набрался храбрости проштудировать твои математические рукописи без справочников и был рад убедиться, что не нуждаюсь в книгах. Прими по этому поводу мои комплименты. Вещь ясна, как солнце, так что, право, нельзя достаточно подивиться, почему математики так упорно настаивают на том, чтобы окутывать ее тайной,—и Энгельс отмечает:—«Но это происходит из-за односторонности мышления этих господ»[1]).

При разработке вопросов «Капитала» Маркс усиленно занят технологией: в 1851 г. он работает над историей технологии, в 1863 г. он снова занят технологией и пишет Энгельсу: «Я пополняю сейчас главу о машинах. Есть ряд любопытных вопросов, которые я игнорировал при первой обработке. Для того чтобы уяснить себе все это, я прочитал целиком свои тетради (выдержки) по технологии, слушаю практический курс для рабочих (чисто экспериментальный) профессора Уиллиса...»[2]).

В 1870 г. Маркса интересует вопрос о торфяных болотах, и он просит Энгельса: «Ты меня обяжешь, если совсем вкратце сообщишь мне некоторые сведения о bogs (болотах.—*Ред.*), peats (торфяные залежи.—*Ред.*) и т. п. Ирландии»[3]).

В 1865—1869 гг. Маркс занят вопросами химии, он ведет переписку с Энгельсом о работе Тремо—о влиянии почвы на развитие видов, на образование рас, он успевает отозваться на выступление Гексли.

Энгельс сообщает ему об яростном выступлении английских ученых против вивисекции, Маркс пишет о «стряпне» естествоиспытателя Бюхнера, одобрительно отзывается о переиздании Шорлеммером своей книги по химии.

На основе уже опубликованного материала легко убедиться в том, насколько широко охватывал Маркс вопросы естествознания. Нет пожалуй ни одной области, с которой бы Маркс не знакомился. Особенно пристально и тщательно всматривался и изучал Маркс то, что связано было с укреплением позиций его основных работ, что служило ему материалом, что давало ему аргументы в борьбе против представителей реакционных сил, против мелкобуржуазных теоретиков. На этом пути Маркс и Энгельс оставили исключительное богатство для разработки проблемы «марксизм и естествознание» и для разработки положительного содержания отдельных областей естествознания; они открыли перспективы расцвета естествознания в эпоху социализма. Принципиальный и крепкий союз Маркса и Энгельса связан был взаимопомощью и исключительной настойчивостью добиться единого понимания. Так было например в отношении к работе Тремо, когда Энгельс добивался согласия Маркса на его оценку. С другой стороны, Лафарг в воспоминаниях о Марксе указывает, что случалось порой Маркс часами готов был отстаивать перед Энгельсом те или иные положения и бывал исключительно рад, когда они в результате приходили к единому мнению. Глубокая принципиальность, партийность отличала великих учителей пролетариата, она пронизывала их личную исключительную дружбу и все их отношение

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 531.
[2]) Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 130.
[3]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 317.

к людям, к науке к жизни. Классовый, партийный поход с исключительной яркостью выступает например в оценке позитивизма, в указании Маркса, что позиции позитивизма несовместимы с последовательной борьбой коммунистов за освобождение пролетариата.

Маркс писал о том, что «позитивная философия означает невежество по части всего позитивного»[1]). Именно в силу того, что позитивизм шел в сторону от столбовой дороги теории, что он, отражая взгляды так называемой радикальной буржуазии, противодействовал вооружению рабочего класса революционной теорией как руководством для действия,—боролись с ним Маркс и Энгельс. Для пояснения вышеуказанного момента об отношении к позитивизму приведем один исключительно яркий отрывок из письма Маркса и Энгельсу от 19 марта 1870 г.

«В минувший вторник я впервые снова был на заседании General Council[2]). Со мною Феликс Голт, the Rascal[3]). Он был очень доволен, ибо, в самом деле, кое-что, в виде исключения, было интересно. Proletaires «Positivistes»[4]) в Париже послали, как известно, депутата уже на Базельский конгресс. Спорили о том, следует ли допускать его, так как он представляет философское общество, а совсем не рабочую организацию (хотя он с товарищами принадлежит «лично» к working class[5]). В результате он был допущен в качестве делегата от отдельных inembers[6]) «Интернационала». Эти ребята теперь конституировались в Париже в качестве branche[7]) Интернационала,—событие, по поводу которого лондонские и парижские контисты подняли большой шум. Они уверены, что между ними вогнали the thin wedge[8]). Генеральный совет, в ответ на сообщение «proletaires positivistes» об их присоединении, самым вежливым образом напомнил им, что Совет может признать их вступление только по ознакомлении с их программой. Они поэтому прислали программу—последняя чисто ортодоксально-контовская,—которая и обсуждалась во вторник. Председательствовал Муддерсэд, очень интеллигентный (хотя и враждебный ирландцам) старый чартист, знаток и личный враг контизма. После продолжительных прений постановили: так как они рабочие,—они могут быть приняты в качестве простой секции, но не в качестве «Branche positiviste[9]), ибо принципы контизма прямо противоречат принципам нашего устава. Впрочем, их дело, как они сумеют примирить свои философские личные взгляды со взглядами нашего устава»[10]).

Маркс и Энгельс до конца своих дней целиком отдавали себя великому делу освобождения трудящихся. Полная победа социализма, весь ход будущей истории, сохраняя Маркса таким же жизненным, бессмертным гением, каким он является сейчас, в дни 50-летия его смерти, сделает еще величественнее образ этого титана мысли.

---

1) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 178.
2) Генерального совета.
3) Негодяй.
4) Пролетарии-позитивисты.
5) Рабочему классу.
6) Членов.
7) Секции.
8) Острый клин.
9) Позитивистской секции (согласно переводу ред. Соч. М. и Э.)
10) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 307—308.

ФИЗИКА И ХИМИЯ КАК НАУКИ В СВЕТЕ МАРКСИЗМА [1])

АКАД. С. Ю. СЕМКОВСКИЙ

I

Вопрос о взаимоотношении физики и химии как наук не сегодняшним днем поставлен. Можно сказать даже, что вопрос этот имеет свою вековую давность. Он вставал на всех решающих этапах развития и химии и физики. Но сейчас он встал перед нами с совершенно особой актуальностью.

С особой остротой и глубиной и в совершенно новом свете вопрос о взаимоотношении физики и химии поставлен новейшей революцией в учении о строении материи. Многие современники и участники этой революции не отдают себе отчета в глубине того переворота в представлениях о строении материи, который произошел на протяжении последних трех десятилетий и продолжает еще на наших глазах развертываться все дальше и глубже. Иным вообще требуется отойти на некоторое отдаление, чтобы суметь в полном объеме и во весь рост охватить историческое величие революции. Это относится одновременно и к революционным переворотам в основах общества, и к революции в истории развития науки.

Измерить глубину революционного переворота, который совершился за эти десятилетия на наших глазах в учении о строении материи, легче всего на представлении об атоме. Ведь в сущности до этого пе-

[1]) Переработанный доклад на VI Всесоюзном менделеевском съезде на юбилейной сессии Всеукраинской академии наук.

реворота наше представление об атоме, с некоторыми модификациями, с некоторыми обогащениями, оставалось в своей коренной основе таким, каким оно было еще у Роберта Бойля, родоначальника научной химии. Научная химия началась собственно с «Chemista scepticus» (1661), в которой Бойль первый порвал путы алхимии и средневековой аристотелевщины. И, как указывает сам Бойль, в другой своей работе «De origine qualitatum et formarum», главный толчок philosophie corpuscularis дал возродитель материализма в XVIII в.—Пьер Гассенди. А. Гассенди в «Syntagma philosophie Epicur»,—на эту работу, вышедшую в 1659 г., как раз и ссылается Бойль [1]),—писал об этом следующее.

«Атом называется так не потому, что он чрезвычайно мал, что он нечто в роде точки (ибо он имеет величину), а потому, что он не может быть разделен, так как недоступен никакому воздействию и не содержит в себе никакой пустоты. И поэтому, когда мы говорим об атоме, мы говорим о том, что не боится разрушения и не ведает ущерба, что невидимо по причине своей малости и в то же время неделимо по причине своей плотности».

Так же в общем смотрел на атомы и Ньютон, который считал, что «они так тверды, что никогда не снашиваются и не раздробляются на части, ибо обыкновенная сила неспособна разделить то, что сам бог сделал единым при первом творении».

Если пробежать дальнейшие века и взять основоположника атомистики начала XIX в. Дальтона, то конечно Дальтон обогатил понимание атома тем, что ввел качественно различные элементарные атомы с различными специфическими весами [2]), но тем не менее в смысле понимания атома как чего-то неделимого, неразложимого, обладающего абсолютно простой структурой, он остался принципиально на той же точке зрения Гассенди, Бойля, Ньютона. И, что важно отметить, господство этой точки зрения сохранялось на всем протяжении развития химии, до Менделеева включительно.

Правда, у Лотара Майера например мы встречаем уже понимание того, что атом разложим. Я позволю себе привести это место из его «Die modernen Theorien Chemie» (изд. 2-е, 1872 г.), так как из разговоров с химиками, советскими и иностранными, я убедился, что мало кто из них об этом знает. Атомы, читаем мы здесь, «хотя и суть вероятно частички массы более высокого порядка, чем молекулы, но все же еще не последние мельчайшие частички.

Дело, наоборот, обстоит так, что подобно тому как массы большего, более доступного нашим чувствам протяжения состоят из молекул, а молекулы, или частицы массы первого порядка,—из атомов, или частиц массы второго порядка, точно так же атомы в свою очередь состоят из соединения частичек третьего и высших порядков».

[1]) «Plus certe Commedi e parve ille, sed lucupletissime gassendi syntgmate philosophie Epicuri percepera m».

[2]) В старом предисловии к «Анти-Дюрингу» (1878 г.) Энгельс, ссылаясь на Диогена Лайртского (т. X, I, § 43—44 и 61), отмечал, что «уже Эпикур приписывал атомам не только различную величину, но и различный вес, т. е. по-своему уже знал атомный вес и атомный объем» (ср. также докторскую диссертацию Маркса о «Различии между натурфилософией Демокрита и натурфилософией Эпикура», Маркс и Энгельс, т. I). Но, устанавливая связь воззрений Дальтона с атомистикой Эпикура, Энгельс отнюдь не имел в виду умалить значение Дальтона, открывшего новую эпоху в химии (см. дальше).

Но если взять общее представление об атоме, которое господствовало в химии, за вычетом отдельных, более дальновидных высказываний, то в целом здесь все же цепко держалось представление о неизменном, неразложимом, обладающем абсолютно простой структурой атоме. С большой силой это сказалось и у творца периодической системы элементов—Менделеева.

Конечно у Менделеева не было уже грубого представления о механической неделимости атома, и он делает специальную оговорку, что неделимость атома надо понимать «не на манер древних метафизиков китайско-греческого образца [1]). Он подчеркивал, что «для нас ныне атом есть неделимое не в геометрическом, абстрактном смысле, а только в реальном, физическом и химическом» [2]).

Иногда даже Менделеев специально оговаривал неделимость атомов только в химическом смысле. Так именно нужно понимать его слова о том, что «за последнее время стали много и часто говорить о раздроблении атомов на более мелкие электроны, а мне кажется, что такое дробление должно считать не столько метафизическим, сколько метахимическим представлением» [3]). Это во всяком случае, поскольку речь идет о химии, Менделеев решительно подчеркивал, что «простые тела составляют крайнюю грань наших познаний о веществе» [4]).

Возьмем ли мы его «Основы химии», или фарадеевские чтения в Лондонском химическом обществе в 1889 г. («Два лондонских чтения»), или его статью о периодической законности химических элементов в Энциклопедическом словаре Брокгауза и Эфрона (т. XXIII, 1898 г.), или статью «Золото из серебра» [5]), или наконец чрезвычайно любопытную «Попытку химического понимания мирового эфира», предисловие к которой помечено уже июлем 1905 г.—повсюду Менделеев неизменно отстаивает те же позиции.

Вот например в словаре Брокгауза и Эфрона, в статье о периодическом законе, он говорит о «материально разнородных элементах, друг в друга не превращающихся и обладающих самостоятельной весомой сущностью». «Они (элементы) видоизменениям и взаимным превращениям не подвергаются и представляют по современным воззрениям неизменную сущность изменяющегося (химически, физически и механически) вещества». «Они оказываются чем-то отвлеченным»,—и Менделеев ставит даже вопрос о том, каким образом «столь реалистическое значение, как химия», пришло «к такому почти идеалистическому представлению».

Такой казус Менделеев склонен объяснять тем, что вообще в физико-математической области знания сочетались: «идеализм с материализмом, отвлеченность с конкретностью, монархически общее с демократически частным». И Менделеев со всей решительностью возражает против

[1]) Менделеев, Попытка химического понимания мирового эфира, стр. 13, изд. 2-е, 1910 г.

[2]) Менделеев, Основы химии, стр. 164, изд. 5-е, СПБ. 1889 г., прим. 31 (ср. в новейшем 11-м изд. 193 г., т. I, стр. 91). Я цитирую «Основы химии» преимущественно по 5-му изданию, потому что в дальнейших изданиях Менделеев частью сильно сократил, частью вовсе выпустил содержание примечаний, посвященных как раз вопросам более общего характера.

[3]) Менделеев, Попытка химического понимания мирового эфира, стр. 24.

[4]) Менделеев, Основы химии, стр. 17, изд. 5-е.

[5]) «Журнал журналов» за 1897 г.

того, чтобы его таблица, которая ведь при первом взгляде невольно возбуждает представление о единстве материи, была рассматриваема как довод в пользу такого именно представления. В специальном примечании (стр. 318) он пишет здесь: «Но я с своей стороны не могу думать, что периодическая законность служит косвенным подтверждением мысли об единстве материи».

За этот взгляд он держался до того цепко, что даже после того, как были открыты радиоактивные явления и признано существование электронов, он выступил специально с «химическим пониманием мирового эфира» именно для того, чтобы таким путем попытаться обойти необходимость признания сложной структуры атома. Он сам признает, что именно эти соображения руководили им и заставили его выступить с этой своеобразной «попыткой».

«Не вдаваясь в развитие изложенной попытки понять эфир, я однако желал бы, чтобы читатели не упустили из вида некоторых, на первый взгляд побочных обстоятельств, которые руководили ходом моих соображений и заставили выступить с предлагаемой статьей. Эти обстоятельства состоят в ряде сравнительно недавно открытых физико-химических явлений, которые не поддаются обычным учениям и многих уже заставляют отчасти возвращаться к представлению об истечении света, отчасти придумывать мне мало понятную гипотезу электронов, не стремясь выяснить до конца представления об эфире как среде, передающей световые колебания. Сюда относятся особенно радиоактивные явления»[1]).

«Всякое представление о дроблении атомов,—пишет в другом месте Менделеев,—должно считать, по моему мнению, противоречащим современной научной дисциплине, а те явления, в которых признается дробление атомов, могут быть понимаемы как выделение атомов эфира, всюду проникающего и признаваемого всеми»[2]).

Менделеев решительно высказывается против «единства материала, из которого сложились элементы». И характерно, что это свое понимание он строит на незыблемом, как ему кажется, философском фундаменте. За такой фундамент своего философского мировоззрения он признает «нераздельную, однако и не сливаемую познавательную троицу вечных и самобытных: вещества (материи), силы (энергии) и духа[3]).

Еще в «Лондонских чтениях» он так пытался обосновать необходимость признания самобытно-индивидуального начала.

«Давно сказано: дайте точку опоры—и землю легко сдвинуть. Так должно сказать: дайте что-либо индивидуализированное—и станет легко понять возможность видимого многообразия. Иначе—единое как же даст множество? Естествознание нашло после великого труда исследований индивидуальность химических элементов, и потому оно может ныне не только анализировать, но и синтезировать, понимать и охватывать как общее, единое, так и индивидуальное. Единое и общее, как время и пространство, как сила и движение, изменяется последовательно, допускает интерполяцию, являя все промежуточные фазы. Множественное, индивидуальное, как мы сами, как простые тела химии, как члены

---

[1]) Менделеев, Попытка химического понимания мирового эфира, стр. 50.
[2]) Там же, стр. 24.
[3]) Там же, стр. 7.

своеобразной периодической функции элементов, как дальтоновские кратные отношения, характеризуется другим способом: в нем везде видны— при связующем общем—свои скачки, разрыв сплошности, точки, исчезающие от анализа бесконечно-малых, отсутствие промежутков. Химия нашла ответы на вопросы о причине множества, и одна, держась многих элементов, подчиненных дисциплине общего закона, указывает выход из индийского исчезания во всеобщем, дает свое место индивидуальному. Это место индивидуальности притом столько ограничено охватывающим, всесильным—всеобщим, что составляет не более как точку опоры для того, чтобы понять множество в единстве»[1]).

На деле у Менделеева вся эта «диалектика» множества в единстве направлена своим острием односторонне против признания сложности элементов и единства материи, несмотря на качественную разнородность ее форм. И в этом именно смысле он ставит «природу элементарных индивидуумов»—атомов рядом с теми двумя предметами, «постоянно вызывающими людское удивление и благоговение», о которых говорил Кант: «Нравственным законом внутри нас и звездным небом над нами»[2]). И чтобы спасти от разложения пред лицом радиоактивных явлений и электронной теории самобытно-индивидуальное начало атомов, Менделеев и прибег к эфиру, понимаемому как такой же самобытный химический элемент. В этих целях Менделеев дополняет свою периодическую систему элементов, помещая в первом ряду нулевой группы предлагаемый и подлежащий еще открытию элемент Y с атомным весом 0,2 (Менделеев предлагает назвать его коронием). Любопытно при этом отметить признание Менделеева, что он уже при установке в 1869 г. периодической системы допускал, что раньше водорода можно ждать элементов, обладающих атомным весом менее 1, но что он «не решился высказываться в этом смысле по причине гадательности предположения и особенно потому, что тогда остерегся испортить впечатление предполагавшейся новой системы, если ее появление будет сопровождаться такими предположениями, как об элементах легчайших, чем водород!» Теперь же в поисках эфира как химического элемента Менделеев не только помещает перед водородом «короний», но и перед последним, в нулевом ряде, нулевой группы, помещает в качестве предполагаемого эфира элемент X.

«Поэтому,—читаем мы здесь у Менделеева,—я прибавлю в последнем видоизменении распределения элементов по группам и рядам не только нулевую группу, но нулевой ряд, и на место в нулевой группе и в нулевом ряду помещен элемент X, который[3]) и решаюсь считать, во-первых, наилегчайшим из всех элементов как по плотности, так и по атомному весу; во-вторых, наибыстрее движущимся газом; в-третьих, наименее способным к образованию с какими-либо другими атомами или частицами определенных сколько-либо прочных соединений и, в-четвертых, элементом, всюду распространенным и всепроникающим, как мировой эфир. Конечно это есть гипотеза, но вызываемая не одними «рабочими» потребностями, а прямо реальным стремлением замкнуть реальную периодическую систему известных химических элементов

[1]) Менделеев, Попытка химического понимания мирового эфира, стр. 45—46.
[2]) Там же, стр. 43.
[3]) Мне хотелось бы предварительно назвать его «ньютонием» — в честь бессмертного Ньютона (примечание Менделеева).

предлогом или гранью низшего размера атомов, чем я не хочу и не могу считать простой нуль-массы. Не представляя себе возможности сложения известных элементов из водорода, я не могу считать их и сложенными из элемента X, хотя легче всех других. Не могу допустить этой мысли не только потому, что ничто не наводит мыслей на возможность превращения одних элементов в другие, и если бы элементы были сложными телами, так или иначе это отразилось бы на опытах, но особенно потому, что не видно при допущении сложности элементов никаких выгод или упрощения в понимании тел и явлений природы. А когда мне говорят, что единство материала, из которого сложились элементы, отвечает стремлению к единству во всем, то я свожу это стремление к тому, с чего начата эта статья, т. е. к неизбежной необходимости отличать в корне вещество, силу и дух, и говорю, что зачатки индивидуальности, существующие в материальных элементах, проще допустить, чем в чем-либо ином, а без развития индивидуальности никак нельзя признать никакой общности. Словом, я не вижу никакой цели в преследовании мысли о единстве вещества, а вижу ясную цель как в необходимости признания единства мирового эфира, так и в реализировании понятия о нем как о последней грани того процесса, которым сложились все другие атомы элементов, а из них все вещества. Для меня этот род единства гораздо больше говорит реальному мышлению, чем понятие о сложении элементов из единой первичной материи. Задачу тяготения и задачи всей энергетики нельзя представлять реально решенными без реального понимания эфира как мировой среды, передающей энергию на расстояниях. Реального же понимания эфира нельзя достичь, игнорируя его химизм и не считая его элементарным веществом; элементарные же вещества немыслимы без подчинения их периодической законности. Поэтому я постараюсь заключить свою попытку такими следствиями выше высказанного понятия о природе эфира, которые представляют возможность опытного, т. е. в конце концов реалистического изучения этого вещества, хотя его быть может нельзя ни уединить, ни с чем либо объединить, ни как-либо уловить»[1]).

Путем сложных и довольно проблематических выкладок Менделеев пытается наперед определить основные свойства этого «ньютония» и приходит к выводу, что для «понимания множества явлений совершенно достаточно признать пока, что частицы и атомы легчайшего элемента X, могущего свободно двигаться всюду, имеют вес, близкий к одной миллионной доле веса водородного атома, и движутся со средней скоростью, недалекой от 2 250 *км*[2]).

И все это для того, чтобы избежать необходимости признать электронную теорию! Здесь обнаружилась метафизическая граница той «стихийной диалектики», которую наперекор своему философскому мировоззрению, толкаемый логикой развития химической науки, проводил в своих научных исследованиях Менделеев, о котором Энгельс писал: «Менделеев, применяя бессознательно гегелевский закон о переходе количества в качество, совершил научный подвиг, который смело можно поставить наряду с открытием Леверье, вычислившего орбиту еще

---

[1]) Менделеев, Попытка химического понимания мирового эфира, стр. 36–83.
[2]) Там же, стр. 49.

неизвестной планеты Нептуна». Энгельс говорит здесь о бессознательном применении диалектики Менделеевым. И как раз в рассматриваемом пункте обнаружилось во всей силе превосходство сознательной диалектики Маркса, Энгельса, Ленина над «стихийной диалектикой» бесспорного гиганта химической науки, каким был Д. И. Менделеев.

Энгельс в письме к Марксу от 16 июня 1867 г., т. е. за два года до открытия Менделеевым периодической системы элементов, писал по поводу атома:

«Гофмана прочитал[1]). Новая химическая теория со всеми ее ошибками представляет большой прогресс в сравнении с прежней, атомистической. Молекула как мельчайшая способная к самостоятельному существованию часть материи есть совершенно рациональная категория, «узел», как говорит Гегель, в бесконечной серии делений, который не заканчивает ее, но полагает новое качественное различие. Атом, изображавшийся прежде как предел делимости, теперь представляет еще только отношение, хотя господин Гофман сам на каждом шагу возвращается к старому представлению, будто существуют действительно неделимые атомы».

Таким образом Энгельс видел в атоме, как и в молекуле, лишь своеобразный качественный «узел» в бесконечной серии делений, но отнюдь не метафизический предел, его же не прейдеши.

В тот самый период, когда Менделеев выступил с попыткой понимания эфира как особого химического элемента, занимающего свое место в периодической системе, в корне отвергая электронную теорию, Ленин, поднявший марксизм на высшую ступень, в своей работе «Материализм и эмпириокритицизм» показал, каким торжеством диалектического материализма явилась вся новейшая революция в учении о строении материи, которая вскрыла единство материи и на основе этого единства ее качественную неисчерпаемость. «Вместо десятков элементов удается следовательно свести физический мир к двум или трем... Естествознание ведет следовательно к «единству материи»... вот действительное содержание той фразы об исчезновении материи, о замене материи электричеством и т. д., которая сбивает с толку столь многих». «Электрон так же неисчерпаем как и атом».

Нет надобности излагать здесь ход новейшей революции в учении о строении материи, связанной с электронной теорией, с квантовой волновой механикой. Целый ряд докладов, особенно в колонне природы химической связи Менделеевского съезда, был посвящен рассмотрению отдельных проблем, вытекающих из этой грандиозной революции. Здесь важно лишь отметить, что ведущая роль во всей этой революции принадлежала физике, а не химии. Таков факт. Физике принадлежала ведущая роль в том коренном перевороте, который совершился в воззрениях на строение материи и, стало быть, в тех теоретических основаниях, на которых базируется сама химия.

Более того, в этом перевороте именно физика впервые вскрыла самый смысл периодической системы. Менделеев, автор этой системы, всегда

[1]) Речь шла повидимому об «Introduction to modern Chemistry», 1865 г.

подчеркивал, что «мы не понимаем причины периодического закона». Так он писал в «Лондонских чтениях»: «Всего лет 20 возникло периодическое учение об элементах; немудрено, что, не зная ничего ни о причинах тяготения и масс, ни о природе элементов, мы не понимаем причины периодического закона». А в статье о периодическом законе в Энциклопедическом словаре он по этому поводу даже прямо ссылается на тайну природы, «в которой нам дана возможность постигать законы, но очень мало возможности постигать истинную причину этих законов». И вот электронная теория, теория атома Бора и все дальнейшие завоевания физики впервые собственно вскрыли надлежащим образом закономерность, лежащую в основе менделеевской системы, и дали этой системе теоретическое обоснование. Они же дали объяснение и тех отступлений, тех неправильностей, какие мы имеем в менделеевской таблице.

Уже одно то, что на место атомного веса, открытого химическими методами, стало атомное число, открытое методами физики, и что свойства элементов выступили перед нами как периодическая функция их атомных чисел, т. е. зарядом,—в достаточной мере символизировало ведущую роль физики. И. Зоммерфельд в своей классической работе «Atombau und Spektralinism» мог с полным правом сказать, что «атомный вес вносит беспорядок, атомное число—порядок и правильность». Действительно, теория Бора из распределения и характера электронных орбит объяснила и периодичность элементов, и неправильности в менделеевской таблице, как например «триады» в VIII группе (железо—коббальт—никель, рутений—радий—палладий, осмий—иридий—платина), и 14 элементов редких земель, о которых Бор писал, что «если бы группа редких земель не была известна, то существование ее можно было бы предсказать», и отступления от порядка атомных весов, как аргон—калий, и т. д.

И если заслуженная слава Менделеева в том, что он теоретически предвидел и предсказал открытие германия, галия, скандия, то уже открытие гафния и дальнейшее заполнение пробелов таблицы (43, 61, 75, 85, 87) было достигнуто физическими методами—при помощи рентгеновых лучей.

Но и сама природа химической связи была вскрыта физическими методами, причем полное подтверждение получили слова Ленина, сказанные им еще в 1908 г.: «С каждым днем становится вероятнее, что химическое сродство сводится к электрическим процессам. Наконец физическими же методами достигнуто разрушение атомного ядра, означающее превращение самих элементов».

Такова картина. Если столетие после Дальтона (1800 г.) стояло под знаком атома и ведущая роль в утверждении атомистических представлений принадлежала преимущественно химии, то новый, XX в., по крайней мере в своей первой трети, стоит под знаком нуклеарно-электронной теории, теории квант, квантовой волновой механики, и ведущая роль во всей этой революции принадлежит прежде всего физике. Хотя тут же надо сделать оговорку, что, разумеется, без конкретного изучения элементов атомов в их качественном своеобразии, как его дала химия, физика не могла бы достигнуть того, чего она достигла в этом перевороте. Без периодической системы элементов не могла бы конечно осуществиться и теория атома Бора.

Периодическая система элементов по группам и рядам, дополненная Д. И. Менделеевым в «Попытке химического понимания мирового эфира».

Ряды	Группы элементов										
	0	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
0	X	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	У	Водород H 1,008	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	Гелий He 4,0	Литий Li 7,03	Берилий Be 9,1	Бор B 11,0	Углерод C 12,0	Азот N 14,01	Кислород O 16,00	Фтор F 19,0	—	—	—
3	Неон Ne 19,9	Натрий Na 23,05	Магний Mg 24,36	Алюминий Al 27,1	Кремний Si 28,2	Фосфор P 31,0	Сера S 32,06	Хлор Cl 35,45	—	—	—
4	Аргон Ar 38	Калий K 39,15	Кальций Ca 40,1	Скандий Sc 44,1	Титан Ti 48,1	Ванадий V 51,2	Хром Cr 52,1	Марганец Mn 55,0	Железо Fe 55,9	Кобальт Co 59	Никель Ni (Cu) 59
5	—	Медь Cu 63,6	Цинк Zn 65,4	Галий Ga 70,0	Германий Ge 72,5	Мышьяк As 75	Селен Se 79,2	Бром Br 79,95	—	—	—
6	Криптон Kr 81,8	Рубидий Rb 85,5	Стронций Sr 87,6	Иттрий Y 89,0	Цирконий Zr 90,6	Ниобий Nb 94,0	Молибден Mo 96,0	—	Рутений Ru 101,7	Родий Rh 103,0	Палладий Pd (Ag) 105,5
7	—	Серебро Ag 107,93	Кадмий Cd 112,4	Индий In 115,0	Олово Sn 119,0	Сурьма Sb 120,2	Теллур Te 127	Иод I 127	—	—	—
8	Ксенон Xe 128,0	Цезий Cs 132,9	Барий Ba 137,4	Лантан La 138,9	Церий Ce 140,2	—	—	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	Иттербий Yb 173	—	Тантал Ta 183	Вольфрам W 184	—	Осмий Os 191	Иридий Ir 193	Платина Pt (Au) 194,8
11	—	Золото Au 197,2	Ртуть Hg 200,0	Талий Tl 204,1	Свинец Pb 206,9	Висмут Bi 208,5	—	—	—	—	—
12	—	—	Радий Rd 225	—	Торий Th 232,5	—	Уран U 238,5	—	—	—	—

II

Все это развитие и «перескок» физики (ранее преимущественно молекулярной) через линию в область внутренней структуры атома и связанных с нею энергетических процессов, объясняющих и самое «химическое сродство», создает у многих физиков своеобразную аберрацию. Химия начинает им представляться как простой отдел физики или, если хотите, как своего рода особое практическое искусство, для которого однако основные закономерности призвана поставлять физика. В этом смысле некоторыми физиками понимается и та самоновейшая дисциплина—«химическая физика», которая искажает основные закономерности химических процессов, образуя однако составную часть физики (в отличие от «физической химии» как части химии).

В этом отношении характерно, что Эйкен свой известный «Очерк физической химии» переименовал в новейших изданиях в «Учебник химической физики». И вот как он мотивирует это переименование: «За последние пять лет наша наука еще дальше развилась в направлении чистой физики,—недаром ведь обязана она многочисленными особенно важными успехами работам известных физиков».

И далее Эйкен говорит, что пока точное естествознание находилось в начальной стадии своего развития, до тех пор резко различали физику и химию. В новейшее же время это стало уже нецелесообразным. Перед нами стоит общая задача—«исследование повсюду проникающих друг друга (ineinandergreifenden) совокупных свойств материи и овладение ею с помощью точных законов. Мыслимо, что в дальнейшем химия целиком сольется с «физикой материи». Пока же необходимо связующее звено, которое до сих пор называлось физической химией». «Но центр тяжести общей физики и химии в области работы уже в настоящее время так сильно продвинулся в сторону физики, что представляется уместным отдать предпочтение названию «химическая физика»[1]).

Я не выдам ничьего секрета, если скажу, что в некоторых наших химических кругах довольно подозрительно в отношении того, что можно назвать «физическим империализмом», смотрят и на работы академика Н. И. Семенова, и в выдвигаемой им «химической физике» усматривают тенденции к поглощению химии физикой.

С другой стороны, частью в порядке реакции на эти тенденции, частью по исторической инерции старого «чисто химического» периода и особенно традиций типологической органической химии, иные химики пытаются замкнуть химическую науку в узкие рамки эмпирических закономерностей «соединений и разложений», а все, что сверх этого и глубже этого, все это признается ими, так сказать, от физического лукавства и к химии отношения не имеющим.

III

Так на нынешнем этапе революции в естествознании с исключительной остротой встал вопрос о взаимоотношении физики и химии как наук. Но корни этого вопроса уходят далеко в историю взаимоотношений

[1]) Lehrbuch der chemischen Physik, zugleich dritte Auflage des Grundrisses der physikalischen Chemie von Dr Arnold Rucken, Leipzig, 1930.

между обеими этими родственными науками. История знала и теснейшую связь и разрыв между ними; история знала и трактовку химии как практического искусства от «спагирического искусства» эпохи Парацельса и Ван-Гельмонта до «систематического искусства» у Канта.

Кант в «Метафизических основоначалах естествознания» подчеркивал, что истинной наукой может быть названа лишь такая, которая обладает аподиктической достоверностью, а каждая отдельная естественная наука обладает ею лишь в той мере, в какой в ней содержится математика. Познание же, имеющее только эмпирическую силу, представляет «лишь не собственно так называемое знание»; так как химия, по мнению Канта, не допускает применения математики, то она и не заслуживает названия науки и скорее должна быть названа «Systematische Kunst» (приведенным в систему искусством) [1]).

Но даже самоновейший термин «химическая физика», насчитывающий всего лишь несколько лет от роду, история знала конечно с иным содержанием, но пожалуй с тем же устремлением. В известном англо-американском философском словаре Болдвина, изд. 1901 г., мы читаем например:

«Смежна с физикой, с одной стороны, астрономия, которая подробно трактует о явлениях, вырастающих из устройства и движений вещества во вселенной, включая и землю. С другой стороны, смежна с физикой химия, которая трактует о специальных свойствах, присущих различным видам вещества. Связующим звеном между этими отраслями является химическая физика, трактующая о законах, которые хотя и общи всему веществу, но видоизменены в своем действии благодаря специальным видам вещества» [2]).

Но вот передо мною лежит совсем старинный учебник физики: «Начальные основания физики, изданные главнымъ правлениемъ училищъ. Для употребленія въ гимназіяхъ Россійской Имперіи. Въ Санктпетербургѣ. При Императорской Академіи Наукъ 1807 года». И вот тут мы читаем:

«Химия и математическая физика или прикладная математика суть не что иное, как две отрасли физики и не могут стоять с нею наравне, но только ей подчинены».

И далее:

«Химическая физика есть наука новая. (Напомню, что это писалось в 1807 г.—*С. С.*) В одной начали со счастливымъ успехомъ упражняться с половины десять столетія и рвеніе, с каковымъ славнейшіе и по нынѣ еще живущіе физики и химики упражнялись в Химической физике, в скором времени возвело оную на удивительную ступень совершенства; за что весьма много обязаны мы благодарностій безсмертному Лавуазье, основателю пневмато-антифлогистической системы».

Здесь очевидно нашло свое отражение устремление Ломоносова, который был основоположником «Истинной физической химии» и хорошо понимал, что физические методы исключительно важны для химии.

В «Слове о пользе химии» Ломоносов указывал, что при изучении химии должно разумом постигать вид, меры, движения и положение

[1]) Immanuel Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft, 3 Leipzig, 1800, Vorwort.

[2]) Dictionary of Philosophy and Psychology by J. M. Baldwin, sc. '00, vol. I, 1901, New-York and London.

«первоначальных частиц, тела составляющих», «высматривать все оных свойства и перемены», и, чтобы достичь этих «тайностей», надо «через Геометрию вымеривать, через Механику развешивать, через Оптику высматривать».

«К сему, подчеркивал Ломоносов,—требуется искусный Химик и глубокий Математик в одном лице. Химик требуется не такой, который только из одного чтения книг понял сию науку, но который собственным искусством в ней прилежно упражнялся; и не такой, напротив того, который хотя великое множество опытов сделал, но... презирал случавшиеся в трудах своих явления и перемены, служащие к истолкованию естественных тайн. Химия руками математика, очами физическими по справедливости назваться может». Физическую химию Ломоносов определял как науку, «объясняющую на основании положений и опытов физических причину того, что происходит через химические операции в сложных телах».

Интересно отметить, что это устремление Ломоносова оттенил и знаменитый Эйлер в специальном письме к нему: «Из Ваших сочинений с превеликим удовольствием я усмотрел, что Вы в истолковании химических действий далече от принятого у химиков обычая отступили и с препространным искусством в практике высочайше основательной физики знание везде совокупляете. Почему не сомневаюсь, что нетвердые и сомнительные основания сея науки приведете к полной достоверности, так что ей после место в физике по справедливости дано быть может».

Ясное дело, в тот период не знали еще тех явлений, которые легли в основу создания новейшей химической физики, но устремление к тому, чтобы отвести химии «место в физике», как мы видим, было довольно сильно проявлено.

IV

Позвольте мне сейчас попытаться дать совершенно сжатый, схематический абрис методологического развития химии, характеристику основных этапов этого развития под углом зрения интересующего нас здесь вопроса о взаимоотношении физики и химии и в частности вопроса о понимании природы химического сродства. Я должен тут же оговориться, что, разумеется, я не имею в виду дать здесь готовую марксистскую периодизацию истории химии. Вообще с историей химии дело обстоит у нас пока весьма неблагополучно, а если говорить о единственно научном, марксистском изучении истории химии, которое предполагает изучение всех социально-экономических условий, на основе которых развивалась химия в тесной связи с развитием техники, то несомненно к этой задаче нам еще только предстоит приступить, и разрешена она может быть лишь длительной работой большого научного коллектива. Здесь же я имею в виду лишь попытаться в схематической форме наметить внутреннюю логику развития химии.

У греков, как известно, естествознание занимало лишь второстепенное место. По выражению Энгельса, «греки еще не дошли до расчленения, до анализа природы». Приемы точного исследования природы мы находим впервые у греков Александрийского периода, а затем в средние

века у арабов, которые дальше их развили. Настоящее же, современное естествознание ведет свое начало со второй половины XV в., от эпохи Возрождения. Нам придется еще вернуться к яркой характеристике этой эпохи, которую дал Энгельс. Прежде всего тут развилась механика земных и небесных тел (Галилей), а «на службе» у нее шло усовершенствование математических методов (аналитическая геометрия Декарта, логарифмы Непера, дифференциальное и интегральное исчисление Лейбница и Ньютона). Были открыты законы движения планет (Кеплер) и объяснены из общих законов движения (Ньютон). В дальнейшем стала развиваться механика жидких и газообразных тел. Физика в целом, за исключением оптики, развитие которой стимулировалось практическими потребностями астрономии, переживала еще первоначальную стадию. Она развивалась на основе механики, и на этой же основе произошло освобождение химии от алхимии, с чего и начался первый период в развитии научной химии.

1. Этот первый период связан с именем Роберта Бойля. Он первый покончил с алхимией, с аристотелевскими «субстанциональными формами» и скрытыми качествами. К последним относилась Affinitas («сродство»). Термин этот мы встречаем, можно сказать, еще в седой древности в истории химии. Его употреблял уже например Albertus Magnus в своих «De rebus mer allicis» (1518). Бойль пользуется еще этим алхимическим термином в «Chemista Scetticus», но уже явно старается избегать его в «De origine qualitatum et formarum». Свое новое понимание химических процессов Бойль построил на чисто механической концепции, на механике «прикрепления» и «отрыва» атомов друг от друга, благодаря «неровностям», «выступам» («зубцам»). Напомним, что это было ведь еще до открытия закона всемирного тяготения Ньютона. Химическое сродство трактуется Бойлем как частный случай механики «прикрепления» и «отрыва» атомов.

2. Следующий период характеризуется переходом к применению в химии ньютоновой теории тяготения. Высшим представителем всего этого развития был Лавуазье. Он применял физические методы в химии.

3. Логика дальнейшего развития вела от закона сохранения массы к закону постоянства отношений (достаточно напомнить драматическую борьбу, которую выдержал Пру против Бертолле) и затем к закону кратных отношений. А закон кратных отношений прямо вел к атомистике Дальтона. «В химии,—писал Энгельс,—новая эпоха начинается с атомистики, поэтому не Лавуазье, а Дальтон—отец современной химии».

Сродство Дальтон понимал как частный случай силы притяжения: отсюда та центральная роль, какую у него играет атомный вес.

4. На этой основе шло развитие четвертого этапа. Открытие гальванического электричества выдвинуло электрохимическую теорию сродства. Здесь достаточно назвать имена Деви, Барцилиуса и позже Фарадея. Это была эпоха в развитии химии, созвучная нашей, где во главу угла выдвигалось электричество, где силы сродства понимались как силы электрохимические. Но эта эпоха стояла на ином, неизмеримо более низком уровне. Химическое сродство трактовалось просто как элементарное проявление противоположных электричеств химических элементов. Отсюда бинарные формулы. Достаточно сравнить их

с «бипольным моментом», о котором нам приходится говорить сейчас, чтобы увидеть, на каком элементарном, упрощенном уровне стояла тогда электрохимическая теория.

И эта именно упрощенность первой электрохимической теории привела к тому, что она все более наталкивалась на затруднения, особенно в применении к углеродистым соединениям.

Временно эти затруднения можно было еще обходить при помощи теории радикалов, но все большее накопление материала органических соединений и в особенности открытие «замещения» в органической химии сделали невозможным применение простых бинарных формул. Так был подорван упрощенный дуализм этой первой электрохимической гипотезы, и притом в такой мере, что даже надолго были скомпрометированы самые попытки применения физических представлений к области химии. Так в следующий период развитие химии пошло на основе разрыва связи с физикой.

5. Начинается обширный и по-своему плодородный период развития органической химии на собственно химической основе. Химическое сродство рассматривается теперь не как частный случай проявления физических сил, будь то механические силы, или силы тяготения, или электрического притяжения как особая сила.

Вот передо мною немецкое руководство по химии знаменитого Либиха, вышедшее в Гейдельберге в 1843 г.[1]), по которому еще лет 70 назад учился мой отец. Здесь мы читаем:

«§ 22. Известны три различные силы притяжения: а) тяжесть, б) сила сцепления, в) химическое сродство».

«§ 46. Сродство. Если два разнородных тела привести друг с другом в соприкосновение, то их свойства либо меняются, либо остаются неизменными».

«§ 47. Причина того, что разнородные тела при соприкосновении меняют свои свойства, проистекает от своеобразной силы, отличной от силы сцепления, ее называют химическим сродством—Affinität».

В этот период замечается также разрыв общетеоретической связи между химией, с одной стороны, и механикой и физикой—с другой. Основная работа химии идет по линии накопления и систематизации углеродистых соединений, и главное внимание сосредоточивается на типах и структуре этих соединений (Дюма, Феррар, Лоран).

Было бы, разумеется, неправильно весь этот период классической органической химии окрашивать в один черный цвет; ведь и в структуре углеродистых соединений обнаружилась диалектика в химии. Достаточно вспомнить то, что Маркс в «Капитале» и Энгельс в «Анти-Дюринге» и «Диалектике природы» писали о диалектике в гомологических рядах углеродистых соединений.

Но все же основное, что характеризовало этот период, это господство типологического классификаторства. Отсюда идут и те традиции ползучего эмпиризма, которые и доныне еще тяготеют над известной частью работников органической химии.

Атомистические представления в этот период признаются, но в то же время подчеркивается их «умозрительная гипотетичность». Так, у Либиха

[1]) «Handbuch der Chemie», von Dr Liebig. S. 9, 11. Heidelberg, 1843.

в работе о составе органических кислот (1836) мы читаем: «Нам ничего неизвестно относительно состояния, в котором находятся элементы двух сложных тел после того, как эти последние вошли в химическое соединение, и в какой группировке представлять себе элементы в соединении, зависит только от соглашения, которое при последующем воздействии освящается привычкой».

А Кекюле в руководстве по органической химии (1861) подчеркивает, что пропорции весом смесей имеют лишь значение факта, простым выражением которого и служат буквы химической формулы. «Но если буквам формулы придавать какое-нибудь другое значение, если рассматривать их как выражение атомов и атомного веса элементов, как это большей частью делают, то является вопрос: как велики или как тяжелы (относительно) атомы? Но так как атомы не могут быть ни измерены, ни взвешены, то ясно, что только мышление и умозрение могут привести к гипотетическому признанию определенных атомных весов».

Отголоском тенденций того же периода явилось и то, что в свое время писал Кольбе по поводу применения Вант-Гоффом всерьез атомистических представлений. «В недавно напечатанной статье,—писал он,—я указал на отсутствие общего и основательного химического образования как на причину упадка, наблюдаемого теперь в химическом преподавании в Германии. Этот недостаток, которым во вред науке страдает значительное число наших профессоров химии, вызывает размножение приверженцев натурфилософии, желающей казаться ученой и плодотворной, в действительности же тривиальной и бессмысленной. Побежденная 40 лет назад духом чистого исследования природы, натурфилософия в настоящее время снова выпущена псевдоестествоиспытателями из клетки, предназначенной для хранения отбросов человеческого ума. Нарядив эту кокотку в модные одежды и покрыв лицо ее белилами и румянами, они хотят провести ее в порядочное общество, в котором для нее нет места. Кому эти опасения покажутся преувеличенными, пусть прочтет (если может) недавно вышедшее фантастическое сочинение Вант-Гоффа и Германа о расположении атомов в пространстве. Я умолчал бы об этом труде, как о многих других, ему подобных, если бы один выдающийся химик не оказал этой затее своего покровительства, восхваляя ее как научную работу.

«Некоему доктору Вант-Гоффу, занимающему должность в Утрехтском ветеринарном училище, очевидно не по вкусу точные химические исследования. Он считал более приятным сесть на Пегаса (вероятно взятого напрокат из ветеринарного училища) и поведал миру то, что он узрел с химического Пегаса в своем смелом полете,—о расположении атомов в пространстве». Пространственное расположение атомов Кольбе рассматривает как «нечто, недалеко ушедшее от веры в колдовство и духов»!

Да, этот период характеризовался господством эмпирического классификаторства, но тем не менее внутренняя логика развития вела его от этого эмпирического классификаторства к теоретическим обобщениям: от теории типов к теории строения и к периодическому закону.

6. Шестой период и стоит под знаком периодической системы элементов Менделеева. Это было величайшее теоретическое обобщение результатов, добытых всем предыдущим развитием химии. Оно

создало базу для сближения с физикой. Менделеев в одном месте говорит, что с точки зрения «дисциплин естественной философии» «со времени Лавуазье, Дальтона и Авогадро-Жерара химия получала все высшие права гражданства в обществе наук о природе и, поставив массу (вес) вещества во главе всех своих обобщений, пошла за Галилеем и Ньютоном». Но действительное завершение этого процесса дала только периодическая система элементов, открытая Менделеевым, которая и заложила после периода разрыва новые основы для восстановления связи между химией и физикой.

7. Величайшее теоретическое обобщение, данное периодическим законом, и на основе последнего систематическое изучение физических условий химических процессов привели в последнюю четверть XIX в. к расцвету классической физической химии, расцвету, который связан с именами Ванг-Гоффа, Аррениуса, Нериста, частью также Оствальда, несмотря на его «энергетический» вывих, от которого ему впоследствии под давлением фактов пришлось отказаться. Это—теперь уже «старая» физическая химия с ее делением на стехиометрию, теорию растворов, химическую статику и кинетику, термохимию, электрохимию, фотохимию.

8. Наконец последний этап, развертывающийся на наших глазах, это—новейший период физической химии, неразрывно связанный с охарактеризованной в начале доклада революцией в учении о строении материи. Электрическая теория материи, сложная структура атома, теория квант, электрическая природа химического сродства, применение квантовой волновой механики к химии привели к небывалому еще в истории развития этих наук взаимопроникновению физики и химии. Но этот же этап привел к новому кризису во взаимоотношениях физики и химии, который я назвал бы «кризисом поглощения», поскольку это развитие привело к широко распространенному представлению о непосредственно предстоящем поглощении химии физикой.

Подведем итоги. Под углом зрения взаимоотношений физики и химии как наук общий обзор основных этапов методологического развития химии приводит к такому резюмирующему выводу:

Вначале—периоды, обозначенные пунктами 1, 2, 3 и 4 до периода органической химии,—мы имеем тесную связь между химией и физикой. Величайшие химики одновременно являются и физиками. Но связь эта осуществляется еще на упрощенной основе. Отсюда—неизбежность разрыва в период классической органической химии—типологической, структурной. Это—период классификаторства и ползучего эмпиризма в химии. Но внутренняя логика развития этого периода приводит к величайшему теоретическому обобщению—периодической системе элементов, которая закладывает основы для восстановления связи с физикой на более высоком уровне. Классическая физическая химия и восстанавливает такую тесную связь. И наконец на наших глазах—новейший период взаимоотношения физики и химии на основе их теснейшего взаимопроникновения в области стыка их, как это пророчески предвидел Энгельс в своем предсказании, что величайших успехов надо ожидать на месте стыка молекулярной и атомной наук, т. е. физики и химии. Но тут же перед нами выступает новый кризис во взаимоотношениях обеих наук—«кризис поглощения» химии физикой.

Все это развитие конечно шло не таким образом, что вначале мы

имеем «равновесие» между физикой и химией, затем это «равновесие» нарушается и потом опять восстанавливается на новой основе. Нет, перед нами выступает здесь не такая внешняя механика, а внутренняя логика, диалектика противоречивого развития, которое идет через противоположности и через борьбу этих противоположностей, через кризисы, вплоть до новейшего кризиса, с которым нам сейчас приходится иметь дело. И если вникнуть в действительную логику этого развития, то должно признать, что все оно упирается в необходимость сознательной диалектики.

Почему именно диалектики? Не искусственно ли, не нарочито ли это? Отнюдь нет, ибо речь идет ведь о том, чтобы установить правильные взаимоотношения между физикой и химией. А такие правильные отношения, ясное дело, не могут быть установлены ни на основе механической связи, ни на основе механического разрыва, а лишь на основе диалектики взаимодействия между обеими этими родственными науками, на основе «единства связи и разрыва», с полным признанием и того общего, что их соединяет, и того качественного своеобразия, которое представляет каждая область.

V

Теперь позвольте мне совершить небольшой экскурс в область классификации наук, чтобы показать, что и здесь весь ход развития приводит к некоторому кризисному состоянию, равным образом упирающемуся в необходимость материалистической диалектики.

Попыток классификации наук мы имеем огромное множество. Когда-то в своем «Курсе позитивной философии» Конт писал: «Мы собираемся классифицировать основные науки. Но мы скоро увидим, что после основательных соображений на этот счет невозможно различать менее шести основных наук, большинство ученых допускает правдоподобным образом большее их число. Если мы примем это, то, как известно, шесть предметов допускают 720 различных расположений. Стало быть, основные науки могли бы дать место 720 различным классификациям» [1]. Пожалуй число такого порядка комбинаций уже имеем в области попыток классификации наук. Мы здесь, в рамках доклада, ограничимся лишь кратким критическим обзором главнейших попыток и притом преимущественно под углом зрения основной, интересующей нас здесь проблемы—места химии и ее взаимоотношения с физикой.

У греков физика была наукой о «Physis», о природе в целом, и охватывала собою все естествознание. Если мы возьмем например «Физику» Аристотеля, то она по сути трактует об основоначалах естествознания вообще. В значительной мере эта традиция широкого понимания физики сохранилась вплоть до наших дней. И когда немцы например говорят «Physikalische Wisenschaft», или французы—Science physique», или итальянцы—«Scienza fisica, или когда мы говорим «физические науки», то тут речь идет именно об объемлющем характере физики.

Но уже очень рано из круга физических наук на особое место выделилась химия. И когда мы возьмем первую в новое время классифи-

[1]) A. Konte, Cours de Philosophie positive, p. 47, t. I. 5, éd., Paris 1879.

кацию наук Бекона, то тут мы находим уже химию, правда, под псевдонимом, в особом положении по отношению к физике.

Бекон, как известно, строил свою классификацию не на логике вещей, а на психологическом анализе познания. «Деление человеческого знания наиистиннейшее то, которое вытекает из троякой способности разумной души, каковая есть седалище знания. История относится к памяти, поэзия—к фантазии, философия—к рассудку»[1]).

Хотя у Бекона таким образом основное деление построено на субъективном принципе, дальнейшее подразделение его классификации носит объективно-предметный характер. Так, философия, относящаяся к рассудку, подразделяется на 1) первую философию, 2) философию природы, к которой математика образует «великое добавление, и 3) философию человека. В свою очередь философия природы подразделяется на 1) теоретическую и 2) практическую; к первой относятся физика, трактующая о началах, образовании и разнообразии вещей, и метафизика, трактующая о формах и конечных причинах; ко второй—механика и магия. Под именем последней и фигурирует химия как искусство превращения субстанции. Таким образом у Бекона химия входит в практическую философию природы, опираясь на физику как на свою теоретическую основу.

Беконов принцип классификации наук применил, как известно, в большой французской энциклопедии Д'Аламбер, лишь более выдвинув математику. Все науки делятся у него равным образом на историю, философию и поэзию. Философия же в свою очередь подразделяется на 1) богословие, 2) пневматологию, которая охватывает логику как искусство мыслить, запоминать, передавать, и мораль, обнимающую учение о благе, об обязанностях, о законах—юриспруденцию, экономику, политику, и 3) философию природы. Философию природы Д'Аламбер подразделяет на три группы: 1) метафизика тел и общая физика, 2) математика, 3) частная физика. К «частной физике» относятся зоология с анатомией, физиологией и медициной, астрономия физическая, метеорология, космология с аэрологией, геологией и гидрологией, ботаника с земледелием и садоводством и наконец химия, которая таким образом занимает у Д'Аламбера место в «частной физике».

Не буду останавливаться на классификации наук Лейбница, у которого «наука делится на три вида: первый—физика, или естественная философия, обнимающая не только тела и их состояния, как число, фигура, но также и духов, даже бога и ангелов; второй вид—философия практическая, или мораль... и наконец третий—логика, или познание знаков, ибо logos обозначает «слово»[2]). Перейдем к знаменитой классификации наук Конта.

Мне пришлось еще в молодые годы застать то положение, когда Конт был своего рода «властителем дум» определенной части российской интеллигенции. Но по сути мы находим у Конта плоский, выхолощенный позитивизм, философски обезоруживающий пред лицом идеализма и тем самым открывающий двери идеализму. Вот

[1]) F. Baconi, De dignitate et augmentis scientiarum, p. 115, 1779. t. I, lib II, cap. 1.

[2]) Oeuvres de Leibnitz ed. p. Jacques, Paris. 1842, Nouveaux Essais sur l'entendement humain, кн. IV, гл. XXI «О разделении наук», стр. 435.

почему Маркс и Энгельс относились к Конту иронически и ставили его, несмотря на его физико-математические познания, ниже идеалиста-диалектика Гегеля. Так, в письме Маркса к Энгельсу от 7 июля 1866 г. мы читаем: «Я мимоходом изучаю теперь Конта, так как англичане и французы так много кричат о нем. Что подкупает их в нем, так это его энциклопедичность, его синтез. Но по сравнению с Гегелем это нечто жалкое, хотя Конт превосходит его в качестве специалиста-математика и физика, т. е. превосходит в деталях, в целом же Гегель бесконечно выше даже здесь. И этот ординарный позитивизм появился в 1832 г.»[1]).

Энгельс в «Диалектике природы» отмечает, что Конт списал свою энциклопедическую иерархию естественных наук у Сен-Симона и что она служит у него лишь ради расположения учебного материала и в целях преподавания; это приводит к «сумасшедшему enseignement integral (интегральному обучению), где каждая наука исчерпывается, прежде чем успели приступить к другой, где правильная в основе мысль утрирована до математического абсурда».

Действительно, в классификации наук Конта мы видим, как «правильная в основе мысль утрирована до математического абсурда». Правильной в основе мыслью Конта является то, что он, хотя и непоследовательно, выступает все же против старого субъективного принципа деления наук. «В настоящее время,—пишет он,—вполне убеждены, что все энциклопедические лестницы, построенные, как классификации Бекона и Д'Аламбера, по какому-либо различению способностей человеческого ума, уже по этому одному порочны в корне... ибо во всякой сфере деятельности наш рассудок употребляет в одно и то же время все свои основные способности»[2]). Но хотя Конт и пытается строить классификацию наук на основе «реального сродства и естественных связей», он однако не поднимается до выдержанного проведения объективно-предметного принципа деления, применяя его упрощенно и эклектически соединяя его с субъективными моментами.

«Энциклопедическая лестница» Конта представляет упрощенный линейный ряд, устанавливающий зависимость наук друг от друга только в одну сторону, и притом связывающий эту зависимость с таким субъективным моментом, как большая или меньшая легкость изучения. «Рассматривая с этой точки зрения все наблюдаемые явления, мы сейчас увидим, что можно их разместить в малое число естественных категорий, расположенных таким образом, чтобы рациональное изучение всякой категории было основано на знании главных законов предыдущих категорий и становилось основанием изучения следующей категории. Этот порядок определяется степенью простоты или, что то же самое, степенью общности явлений, откуда проистекает их последовательная зависимость и стало быть большая или меньшая легкость их изучения»[3]).

Принимая шесть основных наук: математику, астрономию, физику, химию, физиологию и социальную физику, Конт устанавливает односторонюю зависимость их снизу вверх по убывающей простоте и общно-

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 363.
[2]) Цитированное французское издание «Курса», стр. 2.
[3]) Там же, стр. 48.

сти познавательного процесса. Однако он сам не может выдержать этой линейно-односторонней зависимости и как раз в вопросе, касающемся химии и физиологии, вынужден признать, что для решения многих проблем нужно соединение разных точек зрения, принадлежащих разным наукам.

«Речь идет о еще не решенном вопросе, следует ли рассматривать азот при современном состоянии наших знаний как простое тело или же как тело составное. Вы знаете, какими чисто химическими соображениями удалось знаменитому Барцелиусу поколебать почти общепризнанные убеждения современных химиков относительно простоты этого газа. Но что я в особенности должен подчеркнуть, это влияние по этому вопросу на мысль Барцелиуса, как он сам дает в этом ценное признание, того физиологического наблюдения, что животные, питающиеся безазотистыми веществами, содержат в образованиях своих тканей столько же азота, как и плотоядные животные»[1]), откуда видно, что для решения этого химического вопроса нужно и привлечение также физиологии.

Как же смотрит Конт на взаимоотношение физики и химии? Химию он признает отличной от физики наукой. «Ибо какого бы мнения ни держались относительно химического сродства, и если бы даже видели в нем, как это можно думать, лишь видоизменения всеобщего тяготения, производимые характером и взаимным расположением атомов, тем не менее оставалось бы бесспорным, что необходимость постоянно принимать во внимание эти специальные условия отнюдь не позволяла бы рассматривать химию в виде простого приложения к физике»[2]).

Вот почему Конт подразделяет «земную физику» соответственно принципу возрастающей сложности на «две весьма различных части, в зависимости от того, рассматриваются ли тела с точки зрения механической или же с точки зрения химической. Отсюда—физика в собственном смысле слова и химия». Но связь между ними только односторонняя: «Химия, для того чтобы быть понимаемой истинно методическим образом, очевидно предполагает предварительное знание физики. Ибо все химические явления необходимым образом более сложны, чем явления физические, и зависят от последних, не влияя на них».

Но зато химия в свою очередь влияет вверх по энциклопедической лестнице, вплоть до социологии. Социология, по Конту, оказывается подчиненной химии, и не только посредством физиологии: «Так как социальные явления суть наиболее сложные и наиболее специальные из всех явлений, то их законы необходимо подчинены этим самым законам всех предшествующих порядков, из коих каждый проявляет здесь более или менее явственно свое собственное влияние. Что же касается в особенности химических законов, то очевидно, что в совокупность условий существования человеческого общества входят и некоторые существенные химические гармонии между человеком и внешними основными условиями, которые имеют над ним абсолютную власть»[3]).

Отводя химии место между физикой и физиологией, Конт рассматривает химическое действие как представляющее «очевидно в себе самом нечто большее, чем простое физическое действие, и нечто меньшее, чем действие жизненное». Этим определяется и степень совершенства

[1]) Цитированное французское издание «Курса», стр. 25.
[2]) Там же, стр. 51.
[3]) Там же, т. III, стр 2.

химической науки: «Степень совершенства химии ниже степени совершенства физики и выше степени совершенства физиологии». Любопытно, что Конт отмечает также и степень, так сказать, «участия чувств» в каждой науке: «В астрономии наблюдение необходимым образом ограничивается исключительным употреблением одного из наших чувств; в физике к употреблению зрения приходит на помощь еще слух и в особенности осязание. Химия же прибегает к одновременной помощи всех наших чувств для анализа явлений».

Особого внимания заслуживает то, что Конт признает математические методы противоестественными для химии:

«Всякая попытка свести химические вопросы в область математических учений должна считаться до сих пор, и несомненно навсегда, глубоко иррациональной как противная (comme etant antipathique) природе этих явлений: она могла бы породить только смутные и в корне произвольные гипотезы относительно внутреннего строения тел, как это я имел случай отметить в пролегоменах к этой работе»[1]).

Впрочем через две страницы Конт сам себе противоречит, заявляя, что если связь между учениями математическими и астрономическими химией весьма слабая, то этого нельзя сказать о методе. «В этом новом смысле легко познать, наоборот, что достаточная предварительная привычка к математическому духу и астрономической философии неизбежно оказывала бы самое большое и самое благодетельное влияние на способ понимания и на разработку химии и следовательно на большое ускорение ее последующих совершенствований».

У Конта мы вообще встречаем множество внутренних противоречий и несообразностей, которые были вскрыты уже Спенсером в его «Генезис науки» и «Классификации наук»[2]), но сам Спенсер недавно ушел от таких же противоречий и несообразностей в своей классификации наук. Употребляя выражения «абстрактный» и «конкретный» в ином смысле, нежели Конт, Спенсер устанавливает три основных деления наук: 1) абстрактная наука, «которая трактует о формах, в которых явления познаваемы для нас», сюда относятся логика и математика; абстрактно-конкретная наука, «которая трактует о самих явлениях в их элементах»,—сюда относятся механика, физика, химия и т. д., 3) конкретная наука, «которая трактует о самих элементах в их целостности», сюда относятся астрономия, геология, биология, психология, социология и т. д.

Не имея возможности останавливаться здесь на критике сделанной Спенсером попытки классификации наук, пропитанной механистическо-позитивистским духом, отмечу лишь, что его «абстрактно-конкретная» дает довольно путаное разграничение между физикой и химией, и ту и другую к молекулярной механике по отделу молекулярной динамики, т. е. «при отсутствии равновесия, что производит перемену в расположении молекул или в распределении молекулярного движения»: в первом случае изменяются относительные положения молекул с точки зрения разнородности (химия), причем производятся иные соотношения между молекулами (новые сложные вещества) или иные соотношения между силами (новые сродства); а во

[1]) Цитированное французское издание «Курса», т. II, стр. 19.

[2]) «Сочинения Герберта Спенсера», т. II, русский перевод, под редакцией Рубакина, Спб. 1899 г.

втором случае либо путем интеграции порождается ощутимое движение, либо путем дезинтеграции порождается неощутимое движение в форме теплоты, света, электричества, магнетизма. Тут мы имеем искусственное нагромождение принципов и вместе с тем механическое упрощенство и путаницу в вопросе о взаимоотношениях физики и химии.

Из других попыток классификации наук можно упомянуть еще о попытке Уэвелля, автора известной «Истории индуктивных наук»[1]), который основное деление проводит между механикой и химией, а собственно физику рассматривает как «механико-химическую науку», и о попытке Ампера, который «науки третьего порядка, относящиеся к неорганическим свойствам тел и к явлениям, представляемым ими, рассматриваемым вообще», делит на экспериментальную физику, химию, стереономию (законы тел) и атомологию. Ампер помещает химию вслед за физикой, подчеркивая при этом, что физике нечего заимствовать у химии.

«Химия. В том случае, когда отыскивают в телах элементы, из которых они составляются, и те пропорции, в которых сочетаются эти элементы, то все истины, проистекающие из этого изучения, составят другую науку третьего порядка, уже известную под названием химии. Она должна быть помещена за экспериментальной физикой, которая сообщает ей познание свойств, к которым химия прибегает во всякий момент, между тем как физике нечего заимствовать от нее, не считая уже вполне готовых тел, без того, чтобы физику приходилось справляться о роде, каким они были сделаны таковыми»[2]).

В истории классификационных попыток мы встречаем и прямое отрицание самого права деления на физику и химию. Так, Бенно Эрдман, определяя «формальную естественную науку» как науку о законах развития механических процессов, т. е. о законах движения, охватывающую все дисциплины, «которые мы привыкли разделять на физические и химические», подчеркивает:

«Однако в этом разделении (наук на физические и химические.—*С. С.*) не имеется никакого материального права. Оно обусловлено лишь тем, что мы еще не в состоянии определить закономерно молекулярные движения, управляющие химическими соединениями и разложениями, но можем лишь эмпирически указать, при каких условиях наступает то или иное усложнение их»[3]).

Не буду останавливаться на множестве других попыток классификации наук, хотя такие например, как Вундта, заслуживали бы несомненно специального критического рассмотрения, для которого рамки настоящей статьи недостаточны. Вообще попыток классификации мы имеем слишком много—вплоть до такой, как нынешнего президента Чехо-Словакии Массарика, который в свое время тоже «приложил руку» к классификации наук[4]), установив на достаточно эклектической

---

[1]) По-русски: «История индуктивных наук от древнейшего и до настоящего времени» Вильяма Уэвелля, в трех томах, перевод Антоновича и Пынина, Спб., 1867—1869.

[2]) Essale sur la philosophie des sciences sur exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances humaines par A. M. Ampere. p. 1834 75— 6

[3]) B. Erdmann Die Gliederung der Wissenschaften в «Vierteljahreschrift für wissenschaftliche philosophie», 1878.

[4]) T Masaryk. Versuch einer concreten Logik (Klassification und Organisation der Wissensshaften), Wien, 1887.

основе «свое» деление наук на математику, механику, физику, химию, биологию, психологию, социологию, языковедение (= философия языка), эстетику и логику.

Нет надобности рассматривать дальнейшие классификации. Мы и без того получили достаточно пеструю картину. Мы видим здесь искусственность построений и господство эклектики, механически объединяющей объективную и субъективную точки зрения. Ампер даже попытался возвести в принцип «естественной классификации» такое сочетание объективной природы вещей и субъективной точки зрения: «Сообразно тому, что мы сказали выше, двумя главными средствами охарактеризовать науку и установить границы, отделяющие ее от других наук, являются, с одной стороны, природа изучаемых предметов и, с другой—точка зрения, с которой рассматриваются эти предметы»[1]).

Необходимо лишь отметить, что развитие классификационных попыток в новейшее время обнаруживает три характерных черты:

Во-первых, все больше выдвигается субъективный принцип как основа классификации. В этом отношении особый интерес представляет пресловутый Риккерт, который даже основное деление наук на естественные и общественные ставит в зависимость от точки зрения, применяемой при рассмотрении одной и той же эмпирической действительности. Эта последняя «становится природой, если мы рассматриваем ее под углом зрения общего, она становится историей, если мы рассматриваем ее под углом зрения особенного и индивидуального»[2]).

Во-вторых, буржуазные классификаторы озабочены тем, чтобы в их классификациях было обеспечено надлежащее место богу. Так, в известном «Словаре философских наук» Франка мы читаем: «В науках дедуктивных, в науках естественных и в науках моральных человеческий ум непрестанно находится в присутствии бесконечного высшего существа, в каковом одном только могут пребывать вечным образом необходимые идеи, каковое одно только есть первая причина— в высшей степени разумная—порядка физического и порядка морального и каковое одно только может обеспечить человеку выполнение его предназначения за пределами этой жизни»[3]). Отсюда—необходимость геологии, завершающей науки дедуктивные, естественные и моральные.

Не следует думать, что Франк в этом отношении какой-то «устарелый». Напротив, мыслители буржуазного мира, по мере того как надвигается его закат, все больше обнаруживают эту тенденцию. Достаточно взять одного из крупнейших современных буржуазных философов-классификаторов Эриха Бехера, автора капитального исследования «Науки о духе и науки о природе»[4]). Он со всей серьезностью говорит о «науках, трактующих о религиозных предметах». В своем «Введении в философию» он считает нужным указать, что «враждеб-

[1]) Цитированное произведение Ампера, стр. 12.

[2]) Heinrich Rickert, Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung, S. 227, fünfte Auflage, 1929.

[3]) Dictionnaire des sciences philosophiques, sous la direction de M. A. Franck p. 1568, 2 ed. Paris, 1875.

[4]) Geiste wissenschaften und Naturwissenschaften, Untersuchungen zur Theorie und Einteilung der Realwissenschaften, von Erich Becher, München u. Leipzig. 1921.

ные религии настроения могут нарушить чистое философское искание истины», и в качестве венца всей своей классификации философских наук он выдвигает философию религии.

«Наряду с нравственным и прекрасным как особый род ценности выступает религиозно-ценное, благочестивое, святое, составляющее предмет исследования философии религии. Особенно важная, глубочайшим образом затрагивающая мыслящий человеческий дух задача философии ценностей заключается в вопросе, как обстоит дело с ценностями в действительности в целом. Составляет ли последняя преимущественно ценное или злое; существует ли в мире сила, гарантирующая торжество добра; уничтожается ли с нашей смертью ценное и злое в нашей собственной душе, или оно каким-либо образом сохраняется в действительности в целом? Философскую обработку таких вопросов мы выше обозначили как оценочную метафизику, ее часто относят также к философии религии. Таким образом оценочная метафизика, или философия религии, связуя метафизику и философию ценностей, миро- и жизнепонимание, образует конец и венец всей системы философии»[1]). И, ничтоже сумняшеся, тот же Бехер в «Метафизике и естественных науках» объявляет «спорным», «действительно ли бог никогда не бывает дан в человеческом опыте»[2]).

В-третьих, выступает тенденция к механическому «сведению» всех наук к одной, к отрицанию принципиальной основы деления наук на качественно отличные области, к признанию всякого деления наук «искусственным», условным, вопросом простого «удобства» в прагматическом смысле этого слова. Эта тенденция проявлялась уже у Конта. «И действительно,—читаем мы у него,—разделения, устанавливаемые нами между науками, не будучи произвольными, как полагают некоторые, в существе своем искусственны. На самом деле, предмет всех наших исследований один; мы делим его лишь в целях разделения трудностей для их лучшего разрешения»[3]).

Показательным примером этих тенденций в наш период может служить и Оствальд с его стремлением все науки «свести» в конечном счете к энергетике. Деление наук на механику, физику и химию он принимает лишь условно, «ради симметрии»:

«И вот к группе наук о порядке примыкает группа физических или энергетических наук. Они охватывают всю область неорганических процессов, и название энергетические науки происходит от того, что главным понятием во всей этой области признается именно понятие энергии. Здесь мы можем, если хотим сохранить ради симметрии троякое деление, различать механику, химию и физику»[4]).

В широко распространенном у нас «Учебнике физической химии» Эггерта мы находим те же тенденции:

«Чем дальше идет точное исследование природы,—говорит Эггерт, тем больше стираются границы между отдельными областями науки и

---

[1]) Einführung in die Philosophie von D-r Erich Becher, S. 13—14, München u. Leipzig, 1926.

[2]) Erich Becher, Metaphysik und Naturwissenschaften, S. 10, 1992.

[3]) «Курс», т. I, стр. 24.

[4]) W. Ostwald, Die Wissenschaft,Vortrag gehalten auf dem J. Monistenkongress, S. 29, Leipzig, 1911.

тем труднее становится дать точное определение и разграничение отдельных дисциплин. В сущности говоря, такое стремление к разграничению является вредным и препятствует развитию научной мысли.

Современное исследование ставит своей целью не только накопление опытного материала. Оно стремится главным образом установить внутреннюю связь между всеми явлениями природы и выработать единую точку зрения на картину мира, не считаясь с прежним жестким разграничением между отдельными дисциплинами, вытекавшим не из существа вещей, а главным образом из особенностей человеческого восприятия.

Если и до сих пор сохранилось разделение наук на отдельные ветви, то сделано это исключительно из практических целей»[1]).

Перейдем к резюмирующему выводу. В истории попыток классификации наук перед нами развертывается величайший хаос систем, господство упрощенства и эклектики в сочетании объективных и субъективных критериев, прямая реакционность, рост субъективизма и «прагматического» произвола и беспринципности. И—что является методологически решающим—буржуазная наука и философия обнаружили здесь неспособность дать синтез единства всей системы наук и различий между отдельными науками. Таким образом и здесь сама внутренняя логика развития упирается в необходимость материалистической диалектики, которая одна может дать выход из того кризиса, который создался на основе всего хода противоречивого развития.

В свое время известный русский идеалист Владимир Соловьев так писал о материализме:

«Материализм как низшая, элементарная ступень философии имеет всегдашнее прочное значение; но как самообман ума, принимающего эту низшую ступень за целую лестницу, материализм естественно исчезает при повышении философских требований, хотя конечно до конца истории будут находиться умы элементарные, для которых догматическая метафизика материализма останется самою соответственною философиею... С теоретической стороны все сводится окончательно к совокупности простейших телец—атомов, а с практической—к действию простейших материальных инстинктов и побуждений. Ясно, что этим могут удовлетворяться лишь простейшие умы».

Мы можем спокойно предоставить идеалистам тешиться тем, что они рисуют себе своих противников-материалистов болванчиками себе под стать. Но история разрушает до тла это идеалистическое самообольщение. Достаточно взять Фейербаха: ведь он прошел сам основательнейшую школу идеализма прежде чем стал материалистом. Он стал материалистом не потому, что «не дорос» до идеализма, а как раз наоборот, преодолев и изжив идеализм до конца.

А Маркс и Энгельс—разве не прошли они через школу величайшего идеалиста Гегеля, и разве не пришли они к материализму как к более высокой точке зрения? Но вместе с тем они выступили и против упрощенного, механического материализма.

[1]) Джон Эггерт, Учебник физической химии, стр. I, Ленинград, 1931 г., подчеркнуто мною. — *С. С.*

Их диалектический материализм явился той высшей ступенью, которая возвышается над всем предшествующим философским развитием в целом.

Я не имею возможности останавливаться здесь на вопросе о взаимоотношении марксо-ленинской и гегелевской диалектики природы[1]). Укажу лишь на то, что Энгельс дал чрезвычайно высокую историческую оценку гегелевской классификации наук: «Гегель—который своим рациональным синтезом и группировкой естествознания сделал большее дело, чем материалистические болваны, вместе взятые».

Действительно, классификация наук Гегеля, хотя и в идеалистически извращенной форме, исходила из ступеней развития самой природы и в отдельных науках видела выражение этих ступеней в их связи и разрыве одна с другой.

В «Натурфилософии» Гегеля мы находим два варианта классификации наук. В первом издании 1817 г. философия природы делилась на такие отделы: I. Математика; II. Физика неорганического (с подразделениями: а) механика, б) физика элементов, в) индивидуальная физика, куда относилась и химия); III. Физика органического (с подразделениями: а) геологическая природа, б) вегетабильная природа, в) животный организм).

В позднейшем издании мы имеем видоизмененное деление: I. Механика (математическая механика, конечная механика, астрономия); II. Физика (с подразделениями: а) физика всеобщей индивидуальности (элементы, метеорология), б) физика особой индивидуальности (удельный вес, сцепление, звук, теплота), в) физика целостной индивидуальности, причем в конце этого отдела трактуется и химический процесс); III. Органика[2]).

Диалектика Гегеля, как известно, была идеалистической и давала отражение реальных диалектических процессов в кривом зеркале абсолютного идеализма. У Гегеля и в диалектике получалось таким образом извращение всех реальных отношений. Коренную ошибку Гегеля Энгельс справедливо видел в том, что законы диалектики у него «не выведены из природы и истории, а навязаны последним как законы мышления. Отсюда вытекает вся вымученная и часто ужасная конструкция».

Этот идеалистический характер гегелевской диалектики Маркс, Энгельс и Ленин подвергали беспощадной критике, и против этих тенденций—навязать диалектику природе—они всегда жестоко боролись. Вспомним, как Энгельс обрушился на Дюринга за его попытку «высочайше пожаловать конституцию природе». Задача, подчеркивал Энгельс, «не в том, чтобы внести диалектические законы в природу извне, а в том, чтобы найти их в ней и из нее их развить». Не конструировать связи и вносить их в факты, а исходить из объективных форм движения материи: вот чего требует материалистическая диалектика.

«Природа есть пробный камень диалектики», писал Энгельс. Действительно, диалектика, прорывающая тесный горизонт формальной логики, на деле оказывается методом, подтверждаемым всем материалом современного естествознания. Она получает свое подтвержде-

---

[1]) См. мою статью «Марксо-ленінська и гегелівська діалектика природи» № 1 и 5 журнала «За марксистсько-ленінське природознавство» за 1932 г.

[2]) Ср. Hegel, Samtliche Werke, Jubiläumsausgabe, т. V, X.

ние со стороны естествознания именно потому, что, по выражению Энгельса, «она одна представляет аналог и, значит, метод объяснения происходящих в природе процессов развития для всеобщих связей природы, для переходов от одной области исследования к другой».

Кстати сказать, именно потому, что диалектика представляет аналог происходящих в природе процессов, мы часто видим, как естественники стихийно, по внутренней логике предмета своего изучения, толкаются в сторону диалектики. Разумеется, такая «стихийная деалектика» важна лишь как симптом, но совершенно недостаточна: мыслящий естествоиспытатель должен быть сознательным диалектиком.

И можно сказать, что в области химических процессов особенно наглядно выступает этот характер диалектики как аналога действительных процессов. У Энгельса мы находим такой исторический перечень «брешей в консервативном воззрении на природу»: 1) Кант и Лаплас; 2) геология и палеонтология: Ляйель, медленное развитие; 3) органическая химия; 4) механическая теплота, Грове; 5) Дарвин, Ламарк, клетка и т. д. С особенной силой Энгельс подчеркивал, что величайшие триумфы диалектика справляет в области химии. И не случайно он называет механический материализм «дохимическим».

Химия есть наука, которая строится на превращениях веществ, на единстве качественных и количественных моментов, или, по выражению Энгельса, «наука о качественном изменении тел под влиянием изменений количественного состава». Химия есть наука, которая строится на единстве анализа и синтеза. И совершенно естественно, что основоположники марксизма обращали большое внимание на химию. И Маркс и Энгельс занимались химией весьма основательно. Маркс работал в особенности над агрохимией, Энгельс—над органической химией, физической химией и электрохимией, причем оба могли опереться на поддержку своего ближайшего друга, одного из крупнейших химиков того времени—Шорлеммера.

Химия еще потому привлекала к себе внимание основоположников диалектического материализма, что самое место, которое химия занимает в системе наук, представляет собою чрезвычайно важный узел, откуда идут нити и вниз и вверх, ибо химия образует переход к наукам об организме.

Диалектический материализм дал принцип классификации наук, который чужд субъективного произвола, а исходит из логики предмета, и предметы берет в их диалектических связях и разрывах. В основу классификации диалектический материализм кладет объективное различие форм движения материи и их объективные переходы одной в другую.

Мы не можем не воспроизвести здесь замечательного письма Энгельса к Марксу и Шорлеммеру от 30 мая 1873 г., которое сохранилось с пометками Шорлеммера:

«Предмет естествознания,—пишет здесь Энгельс,—движущееся вещество тела. Тела неотделимы от движения, их формы и виды можно познавать только в движении, о телах вне движения без всякого отношения к другим телам нельзя ничего сказать. Только в движении тело показывает, что оно есть. Поэтому естествознание познает тела, только рассматривая их в их отношении друг к другу, в движении. Познание различных форм движения есть познание тел. Исследование этих раз-

личных форм движения• есть поэтому главный предмет естествознания. (Очень хорошо; это также мой взгляд.—*К. Ш.* [орлеммер].)

1. Простейшая форма движения—это перемена места (внутри времени, чтобы сделать удовольствие старому Гегелю)—механическое движение.

a) Движения отдельного тела не существует; однако, говоря относительно, падение можно рассматривать как таковое. Движение к одному, общему для многих тел, центральному пункту. Но как только отдельное тело должно двигаться в другом направлении, чем к центру, оно, правда, подпадает под законы падения, но последние видоизменяются. (Совершенно верно.—*К. Ш.*).

b) Законы траектории и приводят непосредственно к взаимному движению нескольких тел—планетарное и т. д. движение, астрономия, равновесие,—временному или кажущемуся в самом движении. Но действительным результатом этого рода движения в конце концов бывает всегда контакт (соприкосновение) движущихся тел, они падают друг на друга.

c) Механика контакта—соприкасающиеся тела. Простая механика, рычаги, наклонная плоскость и т. д. Но этим не исчерпываются последствия контакта. Он проявляется непосредственно в двух формах: трении и ударе. Обе имеют то свойство, что при определенной степени интенсивности и при определенных обстоятельствах производят новые, не только уже чисто механические последствия: теплоту, свет, электричество, магнетизм.

2. Собственно физика—наука, исследующая эти формы движения, которая после исследования каждой из них в отдельности констатирует, что при определенных условиях они переходят друг в друга, и в заключение находит, что все они при определенной степени интенсивности, которая (степень) изменяется соответственно различным движущимся телам, вызывают действия, выходящие за пределы физики, изменения внутреннего строения тела—химические действия.

3. Химия. При исследовании прежних форм движения было бы более или менее безразлично, производилось ли оно над одушевленными или неодушевленными телами. Неодушевленные тела, правда, показывают эти явления в их наибольшей чистоте. Напротив, химия может познать химическую природу важнейших тел только на таких веществах, которые возникают из процесса жизни; главной ее задачей все больше и больше становится искусственное приготовление этих веществ. Она представляет переход к науке организмов, но диалектический переход только тогда возможно будет установить, когда химия совершит этот действительный переход или будет на пути к этому. (Вот в чем вопрос.—*К. Ш.*).

4. Организм—здесь я пока не пускаюсь ни в какую диалектику. (Я тоже.—*К. Ш.*) [1]).

Под движением диалектика разумеет не просто механическое перемещение в пространстве, но всякое изменение вообще. И связь между качественно различными формами движения материи должна найти свое отражение в классификации наук. «Классификация наук, читаем мы в «Диалектике природы»,—из которых каждая анализирует отдельную

---

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 412—414.

форму движения или ряд связанных между собою и переходящих друг в друга форм движения, является также классификацией, иерархией согласно присущему им порядку, самих этих форм движения, и в этом именно и заключается ее значение»[1]).

Энгельс указывает далее, что в конце прошлого столетия, после французских материалистов, материализм которых был по преимуществу механическим, возникла потребность энциклопедически резюмировать все естествознание старой ньютон-линеевской школы, и за это взялись два гениальнейших человека—Сен-Симон и Гегель. Теперь возникает та же потребность, но на основе нового диалектического взгляда на природу. «Но так как теперь в природе доказана всеобщая связь развития, то чисто внешнее расположение материала так же недостаточно, как гегелевские искусственные диалектические переходы. Переходы должны совершаться сами собой, должны быть естественными. Подобно тому как одна форма движения развивается из другой, так и отражения этих форм, различные науки должны с необходимостью вытекать одна из другой»[2]).

Таким образом материалистическая диалектика требует, чтобы обособление наук давалось на связях самих явлений. Вместе с тем в этом обособлении наук и их развитии обнаруживается единство логического и исторического.

При всем единстве наук—переход от одной к другой всегда означает качественный скачок. «При всей постепенности,—писал Энгельс в «Анти-Дюринге»,—переход от одной формы движения к другой является всегда скачком, решающим поворот. Таков переход от механики небесных тел к механике небольших масс на них; таков переход от механики масс к механике молекул, обнимающей движения, которые мы изучаем в том, что называют физикой в собственном смысле слова: теплота, свет, электричество, магнетизм, точно так же переход от физики молекул к физике атомов—химии—совершается посредством решительного скачка; еще более относится это к переходу от обыкновенного химического действия к химизму белков, называемому нами жизнью»[3]).

«Анти-Дюринг» печатался первоначально в виде статей в «Форвертс». И та часть, которую мы привели выше, была напечатана 9 февраля 1877 г. Вслед затем Кекюле в «Die Wissenchaftlichen Zielle und Leistungen der Chemie» повторил в основном те же мысли Энгельса. Но английский журнал «Nature» придал этим мыслям механистический вид, дав такое изложение, что механика—это, дескать, статика и динамика масс, физика—статика и динамика молекул, а химия—статика и динамика атомов. Энгельс по этому поводу выступил с указанием, что «такое безусловное сведение химических процессов к чисто механическим сужает неподобающим образом поле химии». Называя физику механикой молекул», химию—«физикой атомов» и биологию—«химией белков», Энгельс имел в виду этим выразить переход одной из этих наук в другую, т. е. одновременно и связь, непрерывность и различие, разрыв между их областями. Но называть химию своего рода механикой он признал неправильным.

[1]) Энгельс. Диалектика природы, стр. 18, изд. 1932 г.
[2]) Там же, стр. 19.
[3]) Энгельс, Анти-Дюринг, стр. 16, изд. 1932 г.

Здесь снова обнаружилось превосходство сознательной диалектики наших учителей над «стихийной диалектикой» Менделеева. У Менделеева мы находим попытку сведения всех наук в конечном счете к механике. Вот что он пишет в своих «Основах химии»: «Все (науки.—*С. С.*) стремятся сводить изучаемые ими явления на механические». И приведя пример астрономии, Менделеев продолжает: «Физика и химия, физиология и биология идут в том же направлении»[1]). Менделеев предлагает даже назвать физическую химию «химической механикой».

Но тут уместен вопрос: не устарела ли формулировка Энгельса в данной им конкретной классификации: физика—механика молекул, химия—физика атомов?

Мы отнюдь не «догматики» в том смысле, чтобы мы считали каждое слово, высказанное Энгельсом, по тому или иному конкретному вопросу, непререкаемым, установленным незыблемо, на веки вечные, совершенно независимо от дальнейшего развития научного знания. Энгельс сам подчеркивал, что «с каждым составляющим эпоху открытием даже в естественно-исторической области (не говоря уже об истории человечества) материализм неизбежно должен изменять свою форму»(«Людвиг Фейербах»). И по поводу этих слов Энгельса Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме» писал: «Следовательно ревизия «формы» материализма Энгельса, ревизия его натурфилософских положений не только не заключает в себе ничего «ревизионистского» в установившемся смысле слова, но, напротив, необходимо требуется марксизмом». Ревизия «формы» материализма Энгельса, пересмотр его натурфилософских положений возможны, ибо научное познание мира именно благодаря применению диалектики движется вперед. Но как раз все дальнейшее развитие науки полностью подтверждает по сути основные методологические установки, даваемые диалектическим материализмом, именно потому, что материалистическая диалектика на деле есть аналог процесса самой действительности.

И я полагаю, что хотя электронная теория и все последующие открытия, которые не были еще известны в эпоху Энгельса, вносят несомненно много нового, но они все же сохраняют в силе энгельсовское определение химии как «физики атомов» и ленинское положение о единстве противоположностей—«в физике положительное и отрицательное электричество, в химии—соединение и диссоциация атомов».

Но сначала несколько слов об энгельсовском определении физики. Конечно сказать, что физика есть «механика молекул», не соответствовало бы теперешнему состоянию физики. Но надо иметь в виду, что и Энгельс отнюдь не ограничивал физику областью одних лишь молекулярных процессов. Так, мы можем прочитать у него в «Диалектике природы», в отделе, посвященном теплоте, следующее:

«Назвав физику механикой молекулярного движения, мы тем не менее не забываем, что это выражение вовсе не охватывает всей области современной физики. Наоборот, эфирные колебания, обусловливающие явления света и лучистой энергии, наверное не являются молекулярными

[1]) Менделеев, Основы химии, стр. 2.

движениями в современном смысле слова... Но... приходится прежде всего рассматривать молекулярное движение: это и не может быть иначе, пока наше знание эфира столь недостаточно. Но когда мы сумеем дать механику эфира, то в нее, разумеется, войдет и многое такое, что теперь по необходимости включается в физику».

Стало быть речь здесь идет о том, что «физика эфира»,—а эфир и Энгельс и Ленин трактовали не как некий философский постулат диалектического материализма, а лишь как естественно-научную теорию своего времени,—что «физика эфира» в эпоху Энгельса находилась в неразвитом состоянии.

А теперь позвольте перейти к химии.

VII

Если в основу классификации наук положить объективное различие форм движения (понимаемого как изменение вообще) материи, то химия есть наука о той форме движения материи, которая характеризуется превращением самой формы материи, превращением вещества. Физика «перескочила в самые недра атомов, к протонам, электронам и нейтронам, но предметом химии остается особая форма материи, вещество, элемент, в конечном счете атом. Основной категорией химии остается атом, который есть не механический агрегат обезличенных протонов, электронов и нейтронов, а своеобразный реальный синтез, составляющий качественность каждой особой формы материи. Протоны, электроны и т. д. химия берет не как таковые, а лишь в их связи с атомом, как своей основной категорией. Химия остается «наукой только об атомах» в собственном смысле.

Но новое, выдвинутое нашим периодом величайшей революции в учении о строении материи, заключается в том, что химия как «физика атомов» для разрешения своих задач должна овладеть и внутренней структурой атома, как в свою очередь физика для разрешения своих задач должна овладеть конкретным учением об особых формах материи, как его дает химия.

Если таким образом химии приходится брать многое у физики, а физике у химии, то из этого отнюдь не следует, что речь должна итти о слиянии физики и химии: речь идет лишь о теснейшей связи и союзе обеих родственных наук. Со стороны химии при этом по линии сближения с физикой выдвигается физическая химия, которая составляет часть химической науки, а со стороны физики по линии сближения с химией выдвигается химическая физика, которая составляет часть физической науки. Их совместная работа означает их не механическое слияние и поглощение, а научную кооперацию, координацию сил для укрепления каждой науки в деле разрешения ее особых задач.

Я оставляю здесь открытым вопрос о том, не создается ли при теснейшем соприкосновении физики и химии, на стыке обеих наук, в самом учении о строении материи, некоторый как бы «кондоминимум», совместная для физики и химии область, как например область превращения самих атомов, в форме ли радиоактивных процессов или путем искусственного разрушения атомного ядра.

Из сказанного вытекает и наше отношение к физической химии. Должны ли мы рассматривать ее как особую науку, занимающую свое место рядом с другими, такими же обособленными науками—органической химией и минеральной химией? Никоим образом. Она составляет лишь часть химической науки. То же относится и к органической химии. Те, которые выдвигают органическую химию на положение особой науки, совершенно отделенной от физической химии, обрекают органиков на простое «описательство». Но задача науки не в описании явлений, а в познании их закономерностей. «Описательные» традиции органиков как раз и надо преодолеть, и эта задача требует того, чтобы физическая химия как основная теоретическая часть химии пропитала собою все остальные части и отделы химической науки.

Особое положение,—я могу уделить этому лишь несколько слов,—занимает биохимия, которая как раз представляет то диалектическое звено, которого недоставало в эпоху Энгельса. В свое время Энгельс писал, что диалектический переход к науке об организме «можно будет установить только тогда, когда химия или уже сделает действительный переход, или будет близка к этому». В другом месте Энгельс писал, что если химии удастся изготовить белок, то «химический процесс выйдет из своих собственных рамок» и проникнет в обширную область органической жизни, в область физиологии, которая «есть, разумеется, физика и в особенности химия живого тела, но вместе с тем она перестает быть специально химией: если, с одной стороны, сфера ее действий здесь ограничивается, то, с другой стороны, она поднимается на высшую ступень». В то же время Энгельс подчеркивал, что «она (химия.—*С. С.*) одна объяснит нам диалектический переход к организму». Современная биохимия и должна составить это в высшей степени важное диалектическое звено.

Биохимия в своем развитии базируется конечно на всей химии, но она призвана также оказать обратное воздействие на развитие стоящих под нею отделов химии. В свое время Энгельс указывал на такую же роль органической химии, отмечая, что только при исследовании органических соединений химия нашла ключ к истинной природе наиважнейших тел. Совершенно так же и в настоящее время изучение биохимического катализа, химизма белков и прочие достижения биохомии могут в чрезвычайной степени оплодотворить все развитие химической науки в целом.

Тесная связь между всеми частями химической науки должна быть осуществлена на более широкой основе—теснейшей научной кооперации физики и химии как наук. Более чем когда-либо уместно сейчас вспомнить слова старика Бунаена: «Der Chemiker, der kein Physiker ist, ist gar nichts» («Химик, который не является физиком, вообще ничто»). Глубокий смысл этих слов в полной мере вскрывается только сейчас, в свете той глубочайшей революции, которую переживают и физика и химия. Эта революция властно ставит перед химиками задачу—овладеть физико-математическими методами, которые обеспечили физике такую ведущую роль, особенно на протяжении последних десятилетий».

Но в то же время со всей силой надо подчеркнуть, что речь идет здесь о взаимном оплодотворении физики и химии. Когда-то Менделеев назвал химию «архиреальной наукой о веществе». Действительно,

химик имеет дело с реальным, конкретным веществом. И «архиреальная наука»—химия должна дать плодотворный толчок физике в том направлении, чтобы математические построения последней имели реальный физический смысл. Конечно это надо понимать не в смысле упрощенного требования не выходить за пределы привычных наглядных представлений так называемого «здравого смысла». Над этим «здравым смыслом», выражающим инерцию укоренившихся стародавних представлений, всегда потешались и Маркс, и Энгельс, и Ленин. Развитие науки то и дело ломает установившиеся наглядные представления «здравого смысла». И конечно мы не можем возражать против того, например, что теория относительности с ее кривизной пространства потребовала от нас больших усилий, необходимых для того, чтобы выработать себе совершенно новые физические представления. То же самое относится и к новым представлениям, выработки которых требует волновая механика. Но это отнюдь не значит, что мы должны мириться с тем кризисным положением, которое Ленин характеризовал бьющими словами: «Материя исчезает, остаются одни уравнения».

Вы могли наблюдать, как шла у представителей «кризиса в физике» на Западе «эволюция» представлений волновой механики за самый последний период. Схема этой «эволюции» может быть представлена так: материальная корпускула сперва получила как бы «волновой хвост»; затем оказалось, что вся сила в этом «хвосте», что корпускула есть лишь некое производственное образование на волне, образование, которое становилось все более эфемерным, как некий исчезающий эффект, производимый пакетом волн; но затем и сам этот пакет волн был объявлен лишенным всякой материальности и превращенным в фикцию. В результате упадочные буржуазные ученые пришли к тому, что исчезли в своем материальном существовании и корпускула и волна, и если что осталось, так действительно «одни уравнения». Словом, весь мир провалился у них в небытие!

Если в химии надо преодолеть традиции ползучего эмпиризма, то в физике необходимо преодолеть тот математический формализм, который служит источником физического идеализма, релятивизма, агностицизма. Это может быть достигнуто путем взаимного оплодотворения физики и химии на основе методологии диалектического материализма.

Мы живем в великую эпоху. Это—эпоха величайшей революции в истории человечества. Так всегда было, что революция на арене истории вела с собой революцию и в области науки. Напомню, что когда Лавуазье совершил свою, по выражению Бертело, «revolution chimique» (химическую революцию), то это был тот самый 1789 г., когда революционный народ Парижа шел на штурм Бастилии. Ведь и все наше естествознание ведет свое начало от революционной эпохи—от эпохи Возрождения, когда впервые на арену истории выступила тогда еще революционная буржуазия. Вот как Энгельс в старом введении к «Диалектике природы» характеризовал этот период:

«Это был величайший прогрессивный переворот, пережитый до того человечеством, эпоха, которая нуждалась в титанах и которая породила титанов по силе мысли, страстности и характеру, по многосторонности и учености...

Они почти все живут всеми интересами своего времени, принимают участие в практической борьбе, становятся на сторону той или иной партии и борются, кто словом и пером, кто мечом, а кто и тем и другим...

Кабинетные ученые являлись тогда исключениями; это либо люди второго и третьего ранга, либо благоразумные филистеры, не желающие обжечь себе пальцев.

И естествознание развивалось тогда в обстановке всеобщей революции, будучи само насквозь революционно»[1]).

Именно оттуда пошло гигантскими шагами развитие науки, отражая исполинское развитие производительных сил буржуазного общества.

Маркс и Энгельс в свое время в «Коммунистическом манифесте» отметили, что «буржуазия играла и в истории в высшей степени революционную роль», и создала «более могущественные и более грандиозные производительные силы, чем все предшествующие поколения вместе взятые».

Но свершились исторические сроки, закончился круг развития, и буржуазное общество на наших глазах—по пророческому слову «Коммунистического манифеста»—оказалось в положении того волшебника, который не в состоянии справиться с вызванными его заклинаниями подземными силами.

Настала новая революционная эпоха, эпоха пролетарской революции, которая развертывается на неизмеримо более высоком историческом уровне. И под руководством партии пролетариата, партии научного коммунизма, на одной шестой части земного шара мы уже вступили в эпоху социализма, с которой начинается подлинная история человечества.

Эта эпоха открывает перед наукой небывалые в истории перспективы развития. Но она требует также от науки величайшего героического энтузиазма, плановой целеустремленности, методологической четкости.

Теснейшая научная кооперация обеих родственных наук, основоположных, ведущих во всем естествознании, их союз на основе методологии диалектического материализма обеспечит советской физике и советской химии величайший расцвет, достойный великой эпохи социализма.

---

[1]) Энгельс, Диалектика природы, стр. 87, изд. 1932 г.

МАРКС И ЭНГЕЛЬС О БИОЛОГИИ

ПО МАТЕРИАЛАМ ПЕРЕПИСКИ

П. БОНДАРЕНКО

Идейно-теоретическое богатство, которое содержится в литературном наследстве Маркса и Энгельса, еще в значительной мере не используется естественниками. Между тем в этой сокровищнице марксизма они могли бы черпать ценнейшие мысли и идеи подчас для непосредственного решения стоящих перед естествознанием теоретических проблем.

Для широких кругов естественников остаются еще в значительной мере неизвестными те исключительно ценные мысли и высказывания, которые содержатся по вопросам естествознания, в частности биологии, в переписке Маркса и Энгельса.

Маркс и Энгельс обращались к изучению современного им естествознания, исходя из своей практической деятельности. Являясь основоположниками научного коммунизма, создавая философию пролетариата—диалектический материализм, руководя непосредственно практикой революционной борьбы пролетариата, они в связи с многогранной, разносторонней своей деятельностью обращались к систематическому изучению современного им естествознания. В своей переписке они достаточно вскрывают мотивы, которыми они руководились, обращаясь к изучению той или иной естественно-научной проблемы. Ленин по поводу содержания переписки писал: «Если попытаться одним словом определить, так сказать, фокус всей переписки,—тот центральный пункт, к которому сходится вся суть высказываемых и обсуждаемых идей, то это слово будет диалектика. Применение материалистической диалектики к перера-

ботке всей политической экономии, с основания ее,—к истории, к естествознанию (подчеркнуто мною.—*П. Б.*), к философии, к политике и тактике рабочего класса, вот в чем они вносят наиболее существенное и наиболее новое, вот в чем их гениальный шаг вперед в истории революционной мысли»[1]).

Поверхностное ознакомление с перепиской может создать ложное впечатление какой-то пестроты круга вопросов по биологии, обсуждаемых Марксом и Энгельсом. Но такое впечатление может сложиться лишь у человека, который не имеет ни малейших сведений из истории естественных наук и философии, которому неизвестны вышеприведенные слова Ленина. Только анализируя конкретную, историческую обстановку, в которой жили и творили оба мыслителя, исторические формы классовой борьбы, которая развертывалась в этот период во всех областях, в том числе и в идеологии, можно установить ту внутреннюю связь, которая на фоне исторических случайностей с необходимостью обрисовывает стержневую целевую линию развития теоретических взглядов Маркса и Энгельса.

Если попытаться систематизировать разнообразные высказывания Маркса и Энгельса о биологии по определенным проблемам, то можно примерно набросать следующую схему: 1) проблема «социального и биологического», 2) вопросы органической эволюции, 3) Дарвин и дарвинизм, 4) естественно-научные основы происхождения человека и роль человека как фактора органической эволюции, 5) происхождение жизни, 6) клетка и клеточная теория, 7) характеристика состояния биологических наук в вопросах физиологии, 8) биологические проблемы агротехники, 9) оценка и характеристика крупных биологов-современников.

Приведенная схема далека от совершенства и, как всякая схема, страдает недостатками. Но я привожу ее лишь с той целью, чтобы показать, что по существу вряд ли еще осталась какая-либо теоретическая кардинальная проблема биологии, которую бы в той или иной форме не затрагивали Маркс и Энгельс. Повторяю, что я беру только переписку и только вопросы биологии, хотя для всех известна та энциклопедия диалектических мыслей и идей, которые содержатся в «Анти-Дюринге», «Людвиге Фейербахе», «Диалектике природы», «Капитале» и других капитальных произведениях, которые касаются всех областей естествознания.

Исторический отрезок времени жизни и творчества великих учителей пролетариата очерчивается эпохой промышленного капитализма. Этот отрезок истории характеризовался крупнейшими социальными сдвигами, полосой буржуазных революций, ростом пролетариата и классовых боев его с капиталом.

Капитализм в этот период переживал полосу подъема, развивая мощные производительные силы. Этим обусловливается могучий подъем естественных наук в XIX в., сделавших крупнейшие открытия в различных областях. Они в свою очередь оплодотворяли практику по линии техники и овладения силами природы. Этот исторический момент как нельзя лучше доказывает правильность положения Маркса о конкретно-историческом характере единства природы и человека. «Историю природы и историю людей нельзя отделять, ибо они взаимно обусловливают друг друга».

---

[1]) Ленин, Сборник «Маркс, Энгельс, марксизм», стр. 53—54, 1933 г.

Биология также вышла на прогрессивную дорогу развития именно благодаря исторической смене способа производства. По утверждению Энгельса, биология только в XIX в. получила возможность развития, ибо до этого она «была еще в пеленках».

Обслуживая социальный заказ, биология бьется над разрешением не только целого ряда практических вопросов сельского хозяйства и промышленности, но и вопросов, связанных с оформлением идеологии, мировоззрения класса буржуазии. Превращаясь в служанку капитала, она также участвует в отливании буржуазных форм мышления, отражая вместе с тем в своих основах процесс перехода буржуазии из прогрессивно-революционного класса вначале в реакционно-контрреволюционный в последующем.

Идеологию, систему идей нельзя отрывать от их конкретных носителей. Вот почему, говоря о биологии, мы должны говорить и о биологах. Среди биологов XIX в., особенно первых трех четвертей его, мы имеем яркие имена, справедливо представлявшие плеяду корифеев. Назовем отдельных из них: Дарвин, И. Мюллер, Вирхов, Гельмгольц, Пастер, Дюбуа-Раймонд, Гексли, Геккель и т. д.

Если конкретно обратиться к биографии этих людей, то мы установили бы, что значительное большинство их было не только крупными биологами, но и крупными общественно-политическими деятелями. Многие из них были активными деятелями буржуазных политических партий и даже их организаторами (например Вирхов). Многие из них проделали эволюцию от левобуржуазного радикализма в сторону законченной черносотенной реакции.

Отдельные из них в своей политической деятельности кокетничали с рабочим классом, внося тлетворное влияние буржуазного либерализма и демократизма на пролетариат.

Маркс и Энгельс являлись идейными и практическими вождями пролетариата, оберегали его от разлагающего влияния левобуржуазных демократов, либералов и т. д. Вот почему в переписке Маркса и Энгельса мы встречаем не только имена тех или иных биологов, оценку их учений, но там же дается и их политическая характеристика. Обращает на себя внимание тот факт, что Маркс и Энгельс в переписке останавливаются на Бюхнере, Фогте, Молешотте, Вирхове и т. д.

Бюхнер, Фогт и К⁰ получили уничтожающую характеристику у Маркса и Энгельса. Эти плоские позитивисты, вульгарные материалисты-биологи (физиологи) оказывали свое тлетворное влияние не только системой развиваемых ими плоских философских взглядов, но и непосредственно на практику рабочего движения. Поэтому Маркс и Энгельс объявили непримиримую борьбу этим почтенным буржуа. Они систематически разоблачали их. Достаточно перелистать переписку, где Маркс бичует Фогта[1]), или например Маркс пишет о Бюхнере 14 ноября 1858 г.: «Великий Бюхнер послал мне свои «Шесть лекций и т. д. о теории Дарвина и т. д.». Книга еще не появилась, когда я был у Кугельмана. А теперь он (Бюхнер) посылает мне уже второе издание! Способ, каким делаются такие книги, очень мне (мил.—*П. Б.*). Бюхнер например говорит (и всякий, кто читал чепуху Ланге, знает это и без того), что его chapter о материалистической фило-

[1]) См. Маркс и Энгельс, т. XXII

софии списана большею частью из упомянутого Ланге. И тот же самый Бюхнер смотрит с состраданием сверху вниз на Аристотеля, которого он знает очевидно по наслышке! Но что меня особенно позабавило, так это следующее место по поводу произведения Кабаниса (1798): «Кажется, будто слушаешь Карла Фогта, когда читаешь (у Кабаниса) изречения вроде следующего: «Мозг предназначен для мышления, как желудок для пищеварения или печень для выделения желчи из крови» и т. д.

Бюхнер полагает, очевидно, что Кабанис списал у К. Фогта. У почтенного Бюхнера нехватает критического чутья для того, чтобы сделать обратное предположение. О самом Кабанисе он узнал, повидимому, лишь из Ланге. Ce sont des savants serieux»[1]) («таковы серьезные ученые».—*П. Б.*).

В другом письме Маркс презрительно говорит, что Бюхнер поистине оправдывает свою фамилию как «делатель книг».

Эти «разносчики дешевого материализма», по выражению Энгельса, заслуживали третирования, ибо, не будучи способными материалистически освоить диалектику Гегеля и достижения наук, они пропагандировали материализм в естествознании в плоско вульгарной форме, чем по существу дискредитировали его, усиливали позиции идеализма.

Нельзя не привести и той характеристики, которая в переписке давалась Вирхову. Энгельс 17 апреля 1868 г. пишет Марксу: «Отсылаю при сем обратно письмо Кугельмана. Проделанный им удачный опыт удаления маточного полипа путем вскрытия и выдавливания меня очень заинтересовал; при личном свидании ему придется рассказать мне об этом подробнее. Однако его попытка при помощи этого полипа сделать Вирхова коммунистом очень похожа на внематочную беременность. Если бы даже Вирхов обладал знаниями и теоретическими интересами в области политики, а также в области политической экономии, то все же этот почтенный буржуа уже слишком глубоко сидит в своей почве»[2]). Эта характеристика будет ясна на том фоне, что Вирхов в начале своей деятельности, в 50—60-х годах прошлого столетия, выступал на арене общественной жизни как крупный политический деятель левобуржуазного толка, основав партию прогрессистов. Эта партия левобуржуазного радикализма ставила задачу оказывать влияние на рабочий класс, пуская в обращение левые демагогические лозунги. Однако Маркс и Энгельс в своей тактике заняли непримиримую позицию разоблачения истинной классовой сущности прогрессистов и в этом смысле давали директивы В. Либкнехту. Напомним, что в «Диалектике природы» Энгельс дает оценку и теоретическим взглядам Вирхова в естествознании.

Борьбу с идеализмом в естествознании и биологии Маркс и Энгельс рассматривали как основную прямо политическую задачу. Критикуя идеалистов-философов Гегеля, Канта и т. д., Маркс и Энгельс критикуют естествоиспытателей и некоторых видных биологов, которые отступали от позиций материализма, шатались в сторону идеализма. За непоследовательность в этом отношении Маркс и Энгельс критиковали например Гельмгольца и Гексли, Уоллеса и др. В письме от 12 декабря 1866 г.

---

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 129—130.
[2]) Там же, стр. 40.

Маркс пишет: «В своей последней речи в Эдинбурге, где Гексли выступил в более материалистическом духе, чем в последние годы, он опять оставил себе лазейку. Пока мы действительно наблюдаем и размышляем, мы не можем выйти за пределы материализма. Но все это верно лишь в применении к причине и действию, а «ваш великий соотечественник Юм» ведь уже доказал, что эти категории не имеют никакого отношения к вещам в себе. Итак, вам предоставляется верить всему, что вам угодно. Q. e. d.! (что и требовалось доказать.—*Л. Б.*)» [1]).

Гексли, крупнейший биолог, справедливо именуемый апостолом дарвинизма в Англии, был однако в своих философских взглядах непоследовательным, занимал позиции агностицизма. Среди естествоиспытателей XIX в. мы находим много агностиков. Укажем на Гельмгольца, Дюбуа-Раймонда, Вирхова, Негели и др. Все эти биологи под влиянием философии Канта или скептицизма Юма становились глашатаями агностицизма в естествознании. Агностицизм—прямая дорога к идеализму и поповщине. Вот почему Маркс и Энгельс критиковали этих ученых за отход от материализма, за уступки идеализму. В этой связи понятны и замечания Маркса по адресу Гексли. В статье, разумеется, трудно привести те многочисленные характеристики и оценки, которые давали Маркс и Энгельс биологам, своим современникам. Но уже и приведенных достаточно для того, чтобы судить, как внимательно они относились к изучению философских позиций естественников, выступая с критикой идеалистических шатаний многих среди них.

С такой же непримиримостью бичевал и Ленин естествоиспытателей, отходящих от материализма. «Маркс и Энгельс были до конца партийными в философии» (Ленин).

Глубочайшим вкладом Маркса и Энгельса в науку нужно помимо всего прочего считать обоснование ими философского учения об основных формах движения материи и перехода их друг в друга. Опираясь на ряд естественно-научных открытий (закон превращения энергии, теория Дарвина и т. д.), они как диалектики-материалисты смогли подняться выше современного им уровня естествознания и дать разрешение глубочайших методологических проблем науки. Одной из таких проблем является проблема классификации наук. В письме от 30 мая 1873 г. [2]) Энгельс советуется с Марксом и дает основные положения учения о формах движения материи и на основе их марксистскую классификацию естественных наук. Существовавшие до этого системы классификации покоились на субъективно-идеалистических, чисто произвольных построениях. Отсюда становится ясным все значение взглядов Маркса и Энгельса, ибо ими найден был объективный критерий, исходная база для классификации, исключающая субъективистский подход.

Силой материалистической логики они вскрыли взаимосвязи в науках, исходя из учения о переходе отдельных форм закономерностей движения материи в другие. На этой исходной теоретической основе они разрешали и проблему «социального и биологического», с которой они необходимым образом столкнулись, работая над вскрытием закономерностей общественного развития.

Маркс и Энгельс, разрабатывая глубочайшие проблемы общественного развития, изучая его конкретные исторические формы, начиная с чело-

[1]) Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 387.
[2]) См. Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 412—414.

веческой предыстории и кончая современной им формацией—капитализмом, необходимым образом столкнулись с проблемой «социального и биологического» во всей ее широте. В работе над вопросами исторического генезиса человеческого общества как естественно-исторического процесса перед Марксом и Энгельсом необходимым образом вставал ряд теоретических вопросов, на которые они должны были давать ответ. Таковы вопросы происхождения человека, его специфического отличия от животных, закон населения в человеческом обществе, вопросы труда и т. д.

Отсюда становится понятным, почему Маркс и Энгельс углубляются в систематическое изучение ряда естественных и биологических наук. Из биографии Маркса мы знаем, что еще в юношеские годы он увлекался естественными науками, например геологией. Из материалов переписи мы выясняем, что оба мыслителя систематически следили за успехами естествознания, интересуясь каждым новым сколько-нибудь значительным фактом. Маркс систематически например занимался изучением анатомии и физиологии, гистологии человека.

В письме от 4 июля 1864 г. Маркс пишет Энгельсу: «За это время своей полной неработоспособности я прочел физиологию Карпентера, Лорда—то же, учение о тканях Келликера, анатомию мозговой и нервной системы Шпурцгейма, о клетках—Шванна и Шлейдена. В «Popular Physiologie» Лорда имеется хорошая критика френологии, хотя субъект этот и религиозен». И заканчивает письмо Марко следующими словами: «Ты знаешь, что, во-первых, все у меня приходит поздно и что, во-вторых, я всегда следую по твоим стопам. Поэтому я в ближайшее время думаю много заниматься анатомией и физиологией и, кроме того, буду посещать лекции, где предмет демонстрируется ad aculos и анатомируется»[1]. В одном из других писем он делает попутно замечание, что им просмотрено руководство по физиологии Данильса и что он послал автору свой отзыв. Энгельс, как известно, глубоко занимался изучением всех естественных наук, пытаясь систематизировать и философски обобщить выводы в «Диалектике природы». Напомним только одно весьма важное письмо Энгельса Марксу от 14 июля 1858 г., где он разъясняет значение сравнительной физиологии и анатомии, кончающееся следующими словами: «Как бы то ни было, изучая сравнительную физиологию, начинаешь испытывать величайшее презрение к идеалистическому возвеличению человека над всеми другими животными. На каждом шагу натыкаешься носом на полнейшее совпадение строения человека с остальными млекопитающими; в основных чертах это совпадение замечается у всех позвоночных и даже—в более скрытой форме—у насекомых, ракообразных, червей и т. д. Гегелевская история с качественным прыжком в количественном ряде прекрасно сюда подходит...»[2] и т. д.

Обратим внимание на дату письма. По существу Энгельс уже до появления трудов Дарвина—«О происхождении видов» (1859 г.), тем более «Происхождение человека» (1871 г.) высказывает решительно взгляд на проблему происхождения человека. Мы дальше отмечаем, что оба мыслителя внесли дальнейшее углубление в разрешение проблемы

---

[1] Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 193.
[2] Маркс и Энгельс, т. XXII, стр. 346.

происхождения человека, до чего не доходит в силу буржуазной ограниченности Дарвин. Таким образом можно сделать вывод, что Маркс серьезно занимался изучением анатомии и физиологии человека и других биологических наук.

В работе над рядом глав «Капитала» ему необходимо было опираться на выводы некоторых биологических и вообще естественных наук. «Капитал», как и вообще все произведения классиков марксизма,—это гигантское критическое обобщение, величайший синтез всей совокупности накопленных человеческих знаний, обобщение всей революционной и исторической практики. Отсюда важно подчеркнуть, что биологу и естественнику нужно изучать и такие произведения, как «Капитал», ибо они многое там могут почерпнуть непосредственно для своих теоретических запросов, не говоря уже о том, что на этих классических образцах они будут вооружаться силой марксистского метода.

Проблема «социального и биологического» конкретно обсуждается Марксом в таких разделах, как вопросы труда, рабочая сила, законы населения, вопросы охраны труда и т. д. Труд есть социальная категория, но труд имеет и свою физиологическую характеристику как затрата энергии человеческого организма. Труд как специфическая форма деятельности присуща лишь человеку, организованному в историческое общество. Но некоторые формы кооперации у животных дают возможность понять, как эта специфическая деятельность—труд—генетически развивалась. По существу это глубочайшая проблема для исследования. Основные положения—по какой линии ее разрешить—даны самими классиками, ими же сформулированы основные принципиальные взгляды, как нужно теоретически понимать эту проблему.

Некоторые ревизионисты толка Вольтмана, не будучи способными понять диалектическую интерпретацию Маркса в проблеме «социального и биологического», пытались «выправить» Маркса, упрекая его в «биологизме» [1]).

Другие же извратители, как Каутский, становясь на позиции идеалистического понимания истории, «выправляют» Маркса с позиции современной биологии и теории Дарвина.

Мимоходом заметим, что проблема «социального и биологического» обсуждается Марксом в его ранних работах, в частности в подготовительных работах к «Святому семейству». Хотя там еще сказывается влияние на Маркса философии Фейербаха, однако там же уже выкристаллизовалась и самостоятельная теоретическая линия, линия разрыва с Фейербахом.

В частности заметим чрезвычайно глубокую мысль Маркса, что «образование пяти чувств (речь идет о человеке.—*П. Б.*)—это продукт всей всемирной истории». Нужно понять все философское значение этой мысли Маркса в свете того, что говорит и Ленин, указывая, что для разработки материалистической диалектики как теории познания необходимо изучать «физиологию органов чувств, физиологию развития ребенка» и т. д. Материалистическая разработка этой проблемы имеет громадное теоретико-познавательное значение. Об этом можно судить хотя бы на того факта в истории философии, как возникновение «физиологического идеализма» в XIX в., на что указывает Ленин в «Материализме

[1]) См. Вольтман, Исторический материализм.

и эмпириокритицизме». Некоторые крупные физиологи, как Иоганес Мюллер, желая «подпереть» философию Канта выводами из естествознания, в особенности из физиологии человека (органов чувств), «доказывали» кантовский априоризм (форм чувствования и категорий), исходя из развиваемых ими «нативистической теории» физиологического восприятия пространства и учения о «специфической энергии нервов». Разумеется, органы чувств есть продукт человеческой истории в том понимании, что, вооружаясь техникой завоевания природы, человек расширяет пределы (границы) физиологических восприятий своих органов чувств (укажем хотя бы на микроскоп и т. д.) или исправляет иллюзии и аберрации, корректируя физиологию восприятия. На то, что наши органы чувств не совершенны и дают иллюзии, особенно упирали скептики и агностики в своем утверждении о невозможности познания действительности так, как она есть. Однако указание Маркса содержит, как мне кажется, и другую мысль—исследовать особенности органов человека в связи с тем, что он живет и развивается в различных условиях среды. Возьмем в этой же связи другую глубочайшую проблему, которая поставлена Марксом и Энгельсом и на которой они постоянно останавливались. Я имею в виду конкретизацию сформулированного ими тезиса: «Человек, воздействуя на природу, изменяет и собственную природу», в том направлении, что человек и его деятельность явились крупнейшими факторами эволюции органического мира. На этом вопросе Маркс и Энгельс останавливаются и в переписке и в ряде своих произведений, обсуждая ли учение Дарвина или говоря о работах некоторых авторов, например о книге Тремо, книге агронома Фрааза. Уже ряд буржуазных биологов и естествоиспытателей приходил к абстрактной постановке этой проблемы. Однако ограниченность буржуазного мировоззрения не позволяла им встать на подлинную историческую точку зрения, как не мог этого сделать и Дарвин.

В письме от 25 марта 1868 г. Маркс пишет своему другу: «Очень интересна работа Фрааза (1847): «К л и м а т и р а с т и т е л ь н ы й м и р в о в р е м е н и, т. е. и х и с т о р и я», которая доказывает, что и в и с т о р и ч е с к у ю эпоху климат и флора меняются. Он—дарвинист до Дарвина и допускает возникновение в и д о в даже в историческую эпоху. Но в то же время он агроном. Он утверждает, что с развитием культуры—и соответственно ее степени—исчезает столь желанная для крестьян «влажность» (отсюда и переселение растений с юга на север), и под конец образуются степи. Первоначальное влияние культуры полезно, а в конце она действует опустошающим образом, вызывая обезлесенье и т. д... Итог таков, что культура, если она развивается стихийно, а н е н а п р а в л я е т с я с о з н а т е л ь н о (до этого он, как буржуа, разумеется, не додумывается) (подчеркнуто мною.—*П. Б.*), оставляет после себя пустыню: Персия, Месопотамия и т. д., Греция»[1]). Энгельс в «Диалектике природы» также останавливается на этом вопросе, обвиняя естествоиспытателей, в частности Дрэпера, в излишнем «натурализме» в подходе к изучению природы. Они подходили к изучению природы без учета того, что нового вносит практика самого человека, которая могущественно изменяет рычагами производительных сил облик поверхности земли, органический мир, ее населяющий. Энгельс также

[1]) М а р к с и Э н г е л ь с, т. XXIV, стр. 35.

подчеркивает, что капитализму чужда практика сознательного регулирования и управления последствиями, которые вносит в природу историческая деятельность людей. Сама природа капитализма как стихийно-неорганизованной анархичной системы исключает планомерный, сознательный подход. Это доступно, говорит Энгельс, только социализму. Капитализм хищнически подходит к использованию природных ресурсов. В характеристике взглядов Маркса и Энгельса на проблему «человек как фактор эволюции органического мира» интересно привести некоторые моменты из той полемики, которая возникла между ними по поводу книги Тремо [1]).

Давая оценку этой книге, Маркс указывает, что она представляет значительный прогресс по сравнению с Дарвином в части учета влияния человеческих преобразований в изменчивости органического мира. «Основная идея Тремо,—пишет Маркс,—о влиянии почвы (хотя он, разумеется, не принимает во внимание исторические видоизменения этого влияния; к этим историческим видоизменениям я причисляю также химическое изменение верхнего слоя почвы вследствие агрикультуры и т. п., далее различное влияние, которое при различных способах производства оказывают такие вещи, как залежи каменного угля и т. п.) является, по-моему, такой идеей, которую нужно только высказать, чтобы она навсегда завоевала себе право гражданства в науке, и это совершенно независимо от изложения Тремо».

Нет необходимости излагать здесь ход самой полемики, занимавшей длительный отрезок времени [2]). Для нас важно еще раз подчеркнуть ту общую для Маркса и Энгельса мысль, что деятельность человека, понимаемая конкретно-исторически, отражалась на эволюции органического мира и что буржуазные ученые хотя и подходили к ней, но ставили проблему абстрактно и не исторически. Отсюда вывод: нашим биологам-эволюционистам есть что черпать у классиков марксизма в понимании самих эволюционных проблем.

Поскольку в литературе в связи с 50-летним юбилеем Дарвина подробно освещались высказывания Маркса, Энгельса и Ленина по таким проблемам, как учение Дарвина, проблема эволюции органической природы в целом и в ее конкретных деталях, далее вопросы происхождения человека, где эти мыслители показали, в чем надо искать основную причину качественного прыжка превращения доисторического зоологического предка человека, я считаю излишним подробно на них останавливаться. Нужно только подчеркнуть еще раз, что, формируя философию пролетариата, его мировоззрение, они, само собой разумеется, не могли обходить такие биологические проблемы, которые по сути дела составляют теоретико-познавательный костяк самой науки биологии.

Отсюда понятен тот интерес, который питали Маркс и Энгельс к такой проблеме, как происхождение жизни. В 50-е годы прошлого столетия отмечается острая борьба между механицизмом и витализмом. Витализм XVIII в. под ударами новых достижений и фактов науки (открытие клетки, закона превращения энергии, теории Дарвина, органический синтез Веллер-Бертло) вынужден был сдавать свои позиции. Это не значило,

[1]) См. Trèmaux, Origine et transformations de l'Homme et des autres Etres, Paris 1865 (Тремо, Происхождение и развитие человека и других существ. Париж 1865 г.).
[2]) См. Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 373, 375, 376, 379, 380 и т. д.

что он капитулировал. Он прогрессом науки был выбит из некоторых позиций, на которых он утвердился, пользуясь отсталостью уровня развития биологии того времени. И сейчас мистики типа Дриша, Вольфа, Икскуля и др. спекулируют еще на арене невыясненных наукой проблем. Вопросы происхождения жизни занимали внимание биологов. Это составило даже предмет исторически длительного спора между сторонниками гипотезы самопроизвольного зарождения и противниками ее. Маркс и Энгельс останавливаются и на этой проблеме. Они объявляют себя сторонниками теории самозарождения, но не в той ее метафизически упрощенной формулировке, какую ей давали сторонники аристотелевской generatio. Они понимали, что жизнь—исторический продукт развития «белковых тел», генетически возникший из неорганического мира. Только в таком виде они принимали generatio aequivoca. Они не снижали значения работ Пастера в разрушении наивных взглядов на вопросы самозарождения. Столь же отчетливо Маркс например выразил свое отношение и к таким теориям, как теория пансперами Томсона, Гельмгольца. В письме к Лаврову Маркс, сообщая ему сенсацию о «клетках Траубе», пишет:

«Когда я был у вас третьего дня, я забыл сообщить вам важную новость, которая может быть еще неизвестна вам. Физиологу Траубе в Берлине удалось сделать искусственные клеточки. Это, конечно, не натуральные клеточки, в них нет ядра. Смешивая коллоидные растворы, например желатин с сернокислой медью и т. д., получают шарики, окруженные оболочкой, которые растут посредством всасывания питательных веществ. Таким образом образование оболочки и рост клеточек вышли уже из области гипотез! Это большой шаг вперед, особенно ввиду того, что Гельмгольц и другие собирались уже провозгласить абсурдную доктрину, что зародыши земной жизни падают в готовом виде с луны, т. е. они принесены были к нам аэролитами... Я ненавижу объяснения, которые решают задачу перенесением ее в другую, неизвестную область»[1]).

Работая над главой о ренте, Маркс систематически изучает теоретические вопросы земледелия, физиологии растений. Обращает внимание например то, что Маркс очень внимательно следил за тем историческим спором, который разыгрался между сторонниками минеральной теории Либиха и гумусовой теории Тэра. В этом отношении интересы его письма от 25 марта и 3 января 1868 г.[2]), уже упомянутая полемика по книге Тремо[3]) и т. д.

Мною далеко не исчерпана вся характеристика переписки и всех поднимаемых и обсуждаемых Марксом и Энгельсом вопросов. Разумеется, данная статья не является специальным исследованием по анализу переписки под углом зрения исторического и логического содержания ее. Она преследовала лишь скромную роль—приковать внимание биологов к переписке и стимулировать их в направлении всестороннего изучения классиков марксизма даже для своих теоретических нужд, беря пример у самих учителей коммунизма, которые, являясь в основе представителями общественных наук, все же углубленно изучали естествознание.

---

[1]) Маркс, Письмо к Лаврову от 18 июня 1875 г., «Летопись марксизма», т. V, Гиз, 1928 г. Подчеркнуто мною — *П. Б.*

[2]) См. Маркс и Энгельс, т. XXIV, стр. 2 и 33–35.

[3]) См. Маркс и Энгельс, т. XXIII, стр. 373–380.

В лице Маркса сошел в могилу величайший гений человечества, великий учитель пролетариата. Но марксизм, поднявшийся на новую ступень в ленинизме, через непримиримую борьбу с ревизионизмом победно развивается дальше.

В шестой части мира под руководством ленинской партии во главе с вождем т. Сталиным учение великих основоположников научного коммунизма Маркса, Энгельса, Ленина в творчестве и героике миллионных масс рабочего класса и трудящихся претворяется в жизнь.

Теорией Маркса, Энгельса, Ленина, Сталина овладели и овладевают миллионные массы, и она стала той материальной силой, которая уничтожит господство паразитов во всем мире, подобно тому, как это произошло в нашей стране.

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ РУКОПИСЯХ К. МАРКСА

С. ЯНОВСКАЯ

I

Занятия Маркса по математике падают в основном на последние 20 лет его жизни. Первое указание на эти занятия мы встречаем в письме к Энгельсу от 11 января 1858 г., где Маркс пишет:

«При разработке основных начал экономики меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах, что с отчаяния я снова засел за быстрое прохождение алгебры. Арифметика никогда не давалась мне. Но на обходном пути алгебры я очень скоро справлюсь».

С этих пор Маркс уже не оставлял занятий по математике до самой смерти, занимаясь ею в свободное время или во время болезни, когда систематическая работа над «Капиталом» была для него невозможна. За алгеброй последовала аналитическая геометрия, за нею дифференциальное исчисление. Маркс основательно проштудировал очень солидные по объему и обстоятельные по содержанию курсы алгебры и аналитической геометрии и тщательно их законспектировал. Но особенное внимание он уделил дифференциальному исчислению. Уже 6 июля 1863 г. Маркс пишет Энгельсу:

«В свободное время я занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислением. Кстати! У меня избыток книг по этому вопросу, и я готов послать тебе одну из них, если ты хочешь этим делом заняться. Я считаю это почти необходимым для твоих военных занятий. А кроме того это гораздо более легкая часть математики (поскольку речь идет о чисто

технической стороне), нежели например высшие отделы алгебры. Предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, никаких не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями».

Алгебра таким образом оказалась для Маркса легче, чем арифметика, диференциальное исчисление легче алгебры. Но диференциальное исчисление привлекло особое внимание Маркса конечно не потому, что оказалось для него более легким. Его заинтересовала проблема обоснования диференциального исчисления, которую он поставил перед собой как задачу выяснения диалектики развития его основных понятий и методов.

Если в течение 60-х годов занятия Маркса по математике сводятся в основном к ознакомлению с материалом, который он тщательно конспектирует, то на 70-е годы падают уже самостоятельные его работы, излагающие сложившуюся у него собственную точку зрения на диференциальное исчисление.

«После 1870 г.,—пишет Энгельс в предисловии к II тому «Капитала»,—снова наступила пауза, обусловленная главным образом болезненным состоянием автора. По обыкновению Маркс заполнял это время изучением. Агрономия, американские и в особенности русские земельные отношения, денежный рынок и банки, наконец, естественные науки: геология и физиология, а в особенности самостоятельные математические работы[1]) составляют содержание многочисленных записных тетрадей Маркса, относящихся к этому времени».

В конце этого периода Маркс отделывает начисто две первые части задуманной им большой работы, посвященной диференциальному исчислению, и посылает их Энгельсу. Именно к ним и относится опубликованное в XXIV томе Сочинений Маркса и Энгельса письмо Энгельса от 18 августа 1881 г., служащее ценнейшим дополнением и разъяснением к математическим работам Маркса. Обещанную третью часть, посвященную истории вопроса, Маркс не успел отделать начисто. Однако из дальнейшей переписки (письмо Энгельса от 21 ноября 1882 г. и ответ Маркса от 22 ноября того же года) ясно, что Энгельсу была известна до конца точка зрения Маркса во всем ее отличии от исторически сложившихся. Эти письма относятся к вопросам, освещенным Марксом в имеющемся лишь в черновом наброске историческом очерке.

После смерти Маркса Энгельс предполагал издать его математические работы вместе со своими работами по диалектике природы. В предисловии ко 2-му изданию «Анти-Дюринга», упоминая о своей работе над «Диалектикой природы», Энгельс писал: «Быть может в будущем мне представится случай собрать и издать результаты моих работ вместе с весьма важными математическими манускриптами, оставшимися после Маркса».

Этого намерения Энгельсу однако осуществить не удалось. Известно, какую борьбу с зарождавшимся уже тогда ревизионизмом пришлось выдержать самому Энгельсу, чтобы добиться опубликования «Анти-Дюринга». А после его смерти такие люди, как Бернштейн, почувствовали себя значительно свободнее. И германская социал-демократия, вступившая на путь, приведший ее к предательству интересов рабочего класса и

[1]) Подчеркнуто мною. *С. Я.*

представить $f(x + h)$ в виде $f(x) + Ah + Uh^2$, вместе с основанным на нем лагранжевым определением производной (и дифференциала). Последнее Маркс сравнивает с обычным определением, для чего возвращается к началу учебника Бушарла и делает первую самостоятельную попытку выяснить смысл и значение специфических для дифференциального исчисления символов. Тетрадь заканчивается конспектом последних страниц первой части учебника Бушарла (т. е. «дифференциального исчисления»), трактующих о методе Лагранжа и «исключениях» из формулы Тэйлора. Глава о максимальных и минимальных значениях из учебника Бушарла законспектирована Марксом в отдельной тетради.

Конспекты носят отрывочный и неупорядоченный характер, особенно к концу. Маркс начинает записывать какой-нибудь параграф, но часто тут же обрывает и переходит к другому вопросу, а подчас и другому учебнику, ничем, кроме черты под предыдущим текстом, не отмечая этого перехода. В дальнейшем однако он обычно возвращается к незаконченному вопросу. Многие из затронутых, но незаконченных в этой тетради вопросов Маркс продолжает в других тетрадях или на отдельных листках, посвященных отдельному вопросу. Особенно много таких небольших конспектов и переложений посвящено методу Лагранжа и различным способам доказательства теоремы Тэйлора. Материал заимствован из учебников Бушарла, Гайнда и Голла[1]). Связанной с этим комплексом вопросов проблеме последовательного диференцирования посвящен небольшой конспект (6 страниц) по учебнику Геминга[2]), озаглавленный: «Sukzessive Differentiation (nach G. W. Hemming, 1848). (Cambridge)». Мы видим таким образом, как уже с самого начала внимание Маркса сосредоточивается вокруг проблемы обоснования дифференциального исчисления. Его особенно заинтересовывает при этом лагранжево «доказательство теоремы Тэйлора на чисто алгебраической основе», служащее основою метода Лагранжа, и он посвящает этому вопросу значительную часть второй большой тетради, которую также следует отнести к числу ранних рукописей.

Следует отметить, что первая тетрадь полностью, вторая в подавляющей части перечеркнуты синим и красным карандашом, повидимому в знак того, что материал уже использован. Начало этой тетради, озаглавленное «Несколько измененное[3]) лагранжево доказательство теоремы Тэйлора на чисто алгебраической основе» («Nach Lagrange somewhat modified Entwicklung des Taylorischen Theorems auf bloss algebraischer Grundlage»), представляет собою изложение последней главы дифференциального исчисления в учеб-

---

[1]) Hall T. G., A treatise on the Differential and integral calculus and the Calculus of variations, Cambridge, 1841. Название заимствовано из каталога библиотеки Маркса и Энгельса, согласно которому личный экземпляр Маркса содержит многочисленные пометки его рукою на полях. На заднем листке обертки и на обложке многочисленные математические формулы рукою Маркса. На переднем листке и на стр. 107, 213 надписи (математические формулы) рукою Энгельса.

[2]) Hemming, An elementary treatise on the differential and integral calculus. В личном экземпляре Маркса многочисленные надписи на полях и подчеркивания рукою Маркса. На стр. 21 математическая формула рукою Энгельса.

[3]) Изменено повидимому Бушарла, который начинает изложение этого доказательства так: «Лагранжу... удалось доказать теорему Тэйлора без помощи дифференциального исчисления методом, который мы модифицируем следующим образом..»

нике Бушарла, посвященной, как уже было указано, методу Лагранжа, после чего Маркс дает подробную критическую оценку этого метода. Уже тут повидимому особенное недовольство Маркса вызывает попытка Лагранжа ввести дифференциальные символы лишь для «однородности обозначений», и он подробно останавливается на смысле и значении этих символов. Вся эта часть рукописи осталась невычеркнутой. Довольно значительный отрывок из нее приведен выше полностью (см. вторую из заметок о замене символа $\frac{0}{0}$ символом $\frac{dy}{dx}$). В дальнейшем Маркс переходит к изложению вывода бинома Ньютона из теоремы Тэйлора и впервые замечает, что «в методе Лагранжа теорема Тэйлора, наоборот, вытекает из бинома Ньютона», — замечание, которое он впоследствии неоднократно повторяет, развивая его в дальнейшем в ряде работ. Конец тетради представляет собой снова конспект Гайнда. Сначала Маркс возвращается к только начатому в первой тетради параграфу об остаточном члене строки Тэйлора, а затем конспектирует еще раз (более подробно) параграф об «исключениях» из формулы Тэйлора. Рукопись оканчивается замечанием Маркса об отличии символа $\frac{0}{0}$ в алгебре от того же символа в дифференциальном исчислении и «продолжением другой тетради», в котором Маркс еще раз возвращается к лагранжеву доказательству теоремы Тэйлора, но на этот раз уже не доводит его до конца.

Перечеркнутый материал этой второй тетради использован в первой части третьей большой тетради, представляющей собой в значительной мере уже самостоятельную работу.

Первая часть тетради озаглавлена почти так же, как и предыдущая тетрадь: «I) Lagranges Entwicklung (somewhat modified) des Taylorischen Theorems auf algebraischer Basis». Далее следуют разделы: «II) Теорема Тэйлора покоится на переводе теоремы о биноме с алгебраического языка на дифференциальный способ выражения»; «III) Теорема Маклорена есть также простой перевод теоремы о биноме с алгебраического языка на дифференциальный»; «IV) Еще о теореме Тэйлора (и Маклорена)». Конец тетради представляет собой сводный конспект, посвященный дифференцированию неявной, сложной и обратной функций и полному дифференциалу, за чем следует еще несколько дополнительных замечаний «Mit Bezug auf Taylors Theorem und Lagranges Entwicklung».

Тут не только использован и приведен в порядок весь проработанный Марксом на тему о Лагранже и строках Тэйлора и Маклорена материал, но впервые более или менее систематически изложена сложившаяся к тому времени у него точка зрения по вопросу об алгебраических корнях дифференциального исчисления, именно о связи между биномом Ньютона и строками Тэйлора и Маклорена. Тетрадь эта в свою очередь является первым вариантом большой самостоятельной работы Маркса, озаглавленной: «Теорема Тэйлора, теорема Маклорена и лагранжева теория производных функций». Вопросу о связи между биномом Ньютона и строкою Тэйлора посвящена кроме того еще одна небольшая работа. Чтобы покончить с этим комплексом вопросов, нужно отметить большую, но оставшуюся незаконченной самостоятельную работу о строке Тэйлора, озаглавленную «Теорема Тэйлора», повидимому значительно более позднего происхождения, и заметку об «исключениях» из теоремы Тэйлора, также повидимому более поздпюю.

Лагранж привлек внимание Маркса потому, что пытался дать обоснование дифференциального исчисления на «чисто алгебраической» основе; теоремы Тэйлора и Маклорена—потому, что служили базисом дифференциального исчисления у Лагранжа и их обоснование означало обоснование дифференциального исчисления. Однако уже из первых конспектов ясно, что Маркса, несмотря на ряд заслуг, которые он признавал за Лагранжем, не удовлетворило решение вопроса, которое дал Лагранж. Таким образом решения задачи обоснования дифференциального исчисления в смысле выяснения диалектики развития его основных понятий и методов, начиная с обыкновенной алгебры, нужно было искать на другом пути. Исходя из введенного Лагранжем понятия производной функции, Маркс занялся исследованием самого процесса порождения этой производной и развил на этом законченную концепцию диалектического развития дифференциального исчисления из алгебры.

Этому и посвящена остальная часть рукописей, более поздняя в основном по происхождению и наиболее зрелая по содержанию. Она состоит из двух тетрадей (из которых одна служит продолжением другой) и ряда отдельных, продолжающих друг друга работ, написанных для Энгельса, а также вариантов и черновиков к ним. Обе тетради являются их первым, записанным, как выражается Энгельс по поводу набросков III тома «Капитала», in statu nascendi, наброском. Первая содержит сначала ряд примеров на дифференцирование по методу Маркса, а затем сводный конспект по вопросу о дифференцировании показательной функции. Вторая—вначале сводку различных методов дифференцирования тригонометрических функций, а затем—приводимые выше полностью первоначальный набросок работы о дифференциале и исторический очерк. Вообще работам этого раздела принадлежит центральное место в рукописях. Они излагают уже сложившуюся в результате работы собственную точку зрения. Их Маркс считает необходимым довести до сведения Энгельса. В них он говорит о значении, которое они могут иметь. Все основные самостоятельные работы этого раздела опубликованы выше.

Особое место наконец занимает единственная (довольно большая) заметка, трактующая вопросы интегрального исчисления и содержащая критику ньютоновского «Analysis per aequationes numero terminorum infinitas». Повидимому она относится к рукописям по аналитической геометрии.

II

«Путаницу в умы,—писал Энгельс в самом начале «Диалектики природы»,—внесла уже высшая математика, которая рассматривает вечные истины низшей математики как превзойденную точку зрения, утверждает часто вещи, противоположные им, и выставляет теоремы, кажущиеся, с точки зрения низшей математики, просто бессмыслицей... Нет ничего комичнее, чем жалкие уловки, увертки и фикции, к которым прибегает математика, чтобы разрешить это противоречие, примирить между собою низшую и высшую математику, разъяснить им, что то, что является их бесспорным результатом, не представляет собой чистой бессмыслицы, и чтобы вообще рационально объяснить исходный пункт, метод и конечные результаты математики бесконечного». А между тем задача разрешения противоречия между элементарной математикой и анализом имела отнюдь не одно только внутриматематическое значение. Она слу-

жила пробным камнем для научной методологии. Именно на ней потерпело крушение господствовавшее в XVIII столетии метафизическое мировоззрение. Больше того, как это всегда бывает в период «крутой ломки старых установившихся понятий», обусловленной кризисом роста науки, на этой болезни ее роста очень скоро сделал попытку паразитировать идеализм, воспользовавшийся недостатками материализма метафизического, неспособного проникнуть в диалектику развития, связывающую высшую математику с элементарной. Проблема «рационально объяснить исходный пункт, метод и конечные результаты математики бесконечного» со всей остротой стояла еще перед математиками XIX столетия (она не может считаться полностью решенной и по настоящее время). Задача вскрыть диалектику развития основных понятий и методов высшей математики—в первую очередь дифференциального исчисления—из элементарной естественно должна была в таких условиях привлечь к себе внимание Маркса. «Сорвать с науки покров тайны» (Маркс), окутывавший ее, означало лишить идеализм, эту откровенную или прикрытую поповщину, возможности паразитировать на ней, означало торжество диалектического материализма.

Чтобы убедиться в том, что это так, чтобы иметь возможность ближе охарактеризовать поставленную себе Марксом задачу, нам придется однако несколько подробнее остановиться на отношении идеализма к анализу бесконечно малых в XVIII и первой половине XIX столетия.

Сами основатели дифференциального и интегрального исчисления Ньютон и Лейбниц не дали себе труда, как мягко выражается Лагранж, доказать свои основные принципы. Оба пользовались на практике представлениями о бесконечно малой величине, которую то необходимо было принимать в расчет как некоторую конечную, отличную от нуля величину, то можно было отбрасывать, не нарушая однако абсолютной точности результата. Оба пытались оправдать это представление метафизическими соображениями, причем Ньютон сделал попытку опереться на механику. Он представлял себе изменение всякой величины (геометрической, физической, изменение переменных в математике и т. д.) в виде прямолинейного движения точки с переменной, вообще говоря, скоростью (флюксией), и в терминах этих флюксий и флюэнт (текущих) выражал свое новое исчисление. Он перенес таким образом проблему из математики в механику, оставив однако без достаточного разъяснения как вопрос о том, что следует понимать под скоростью (в данный момент), так особенно вопрос о моментах, или приращениях величины (флюэнты) за бесконечно малый промежуток времени, в течение которого скорость ее изменения (флюксию) можно считать неизменной. Моменты эти, к которым он на практике постоянно прибегал, по существу ничем не отличались от лейбницевских дифференциалов или бесконечно малых и восстанавливали полностью все связанные с последними затруднения. За эти-то слабые места нового исчисления, дававшего, несмотря на шаткость оснований, поразительные результаты, и ухватился, как уже было отмечено, идеализм, и притом в ту пору еще в откровенной форме неприкрытого фидеизма (поповщины).

Когда какой-то приятель епископа Беркли на смертном одре отказался от услуг священника на том основании, что принципы христианства не имеют доказательной силы науки, какой например обладает мате-

матика, Беркли решил выступить в защиту религии, против посягательств на нее науки и доказать, что «царица наук»—математика покоится на столь же шатких основах, не теряя однако от этого ни своего практического значения, ни правильности результатов.

«Некоторые математики [1]).—пишет Беркли,—злоупотребляют своим влиянием на друзей, чтобы настроить их скептически к догматам веры, которые строго не доказуемы». «Против этого он показывает, что предложения нового исчисления бесконечно малых еще менее доказуемы, чем те догматы веры. Он не собирается вызывать инквизицию против математиков, он хочет лишь показать, как мало именно они имеют права требовать строгого доказательства того, во что люди верят».

Флюксия, утверждает Беркли, это что-то непонятное, вторая, третья, четвертая флюксия—еще менее понятное. Ибо что такое скорость скорости? Невозможно понять, что такое просто бесконечно малое, еще менее—бесконечно малое от некоторого бесконечно малого. Ньютон говорит о скорости движения в точке в данный момент времени. Но точка есть отсутствие пространства, а момент—отсутствие времени, а там, где нет пространства и времени, нет и движения. О какой же скорости идет речь? И «Беркли требует для читателя, не имеющего математической подготовки, но обладающего здравым смыслом, права судить о том, может ли он мыслить себе скорость без движения; движение, не пробегающее никакого пространства; величины, которые ни конечны, ни бесконечны; или вещь без величины, которая еще делима; фигуру без протяжения; отношение ничего к ничему; действительное произведение из ничего, умноженного на нечто». И когда какой-то математик в ответ на это говорит ему, что скорость тела, движущегося под влиянием постоянно действующей силы, не одинакова в любых двух точках пройденного пути и меняется уже при малейшем изменении места, Беркли отвечает: «Как? Из того, что в двух точках не может иметь места одинаковая скорость, должно следовать, что в одной точке имеет место одна скорость? Не есть ли это заключение того же сорта, как если бы мы сказали: один и тот же человек не может находиться в двух ореховых скорлупах, следовательно он может находиться в одной скорлупе?»

А как выводит Ньютон флюксию для x^n? «При помощи фокуса. Он берет отношение $(x+o)^n - x^n \quad nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o^2 + \ldots$ к $(x+o)-x-o$, получает, вычисляя его, $nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}o + \ldots$, что при $o=0$ переходит в nx^{n-1}. Но на это он не имеет права. Если x при течении получает приращение o, то это приращение должно сохраняться как таковое и не может быть поэтому положено затем $=0$, т. е. рассматриваться как вовсе несуществующее».

Математика бесконечно малого действительно приводит к правильным результатам. Но за счет чего достигается эта правильность? За счет взаимной компенсации ошибок, которую Беркли и демонстрирует в своем «Анналисте» на ряде примеров.

Беркли неправ в том, что считает единственно возможной для дифе-

[1]) Имеется в виду Галлей (Halley). Цитирую по канторовскому изложению полемики, разгоревшейся вокруг основного сочинения Беркли на эту тему, «Анналист» («The Annalist»). (M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. III, S. 742 и сл.).

ренциального исчисления ту форму, которую оно имело у Ньютона и Лейбница. Сличив берклеанскую критику вывода флюксии для x^n с марксовой[1]), читатель увидит, что Беркли вообще пытается отрицать возможность диалектического процесса, состоящего сначала в полагании конечной разности, а затем ее снятии, не признавая таким образом возможности рационализировать этот вывод посредством исправления методов Лейбница и Ньютона[2]).

Однако Беркли воспользовался действительно слабым пунктом анализа бесконечно малых. И поэтому справиться с его критикой математики оказалось нелегко. Для этого пришлось раньше всего *исправить* методы Ньютона и Лейбница, что и было выполнено в основном *Эйлером* и особенно *Д'Аламбером*. Подлинные связи высшей математики с элементарной этим однако еще не были вскрыты, оставались еще темные моменты, и *Лагранж* сделал попытку уничтожить противоречие между алгеброй и анализом, заменив последний своим исчислением первообразных и производных функций. Блестящую картину этого исторического процесса во всем его смысле и значении Маркс дает в своем историческом очерке, подробнее о котором ниже. Здесь мы должны отметить пока лишь одно обстоятельство. Ни Эйлер, ни Д'Аламбер, ни Лагранж, несмотря на колоссальный шаг вперед от Ньютона и Лейбница, не справились однако полностью с проблемой обоснования анализа. Первые два опирались на понятия об *отношении нулей* и о *пределе*, отнюдь не имевшем еще у них в достаточной мере ясного смысла. Последний же избавился от «бесконечно малых, исчезающих количеств и пределов» лишь по видимости. Решение проблемы двинулось вперед, но проблема все же не была еще разрешена. То обстоятельство, что математикам не удавалось вскрыть диалектику развития, связывающую элементарную математику с высшей, опять было использовано идеализмом, который сделал к этому времени колоссальный шаг вперед, став значительно более тонким диалектическим идеализмом Гегеля.

С точки зрения диалектического материализма «диалектика головы—только отражение форм движения реального мира как природы, так и истории». С точки зрения Гегеля—наоборот, «ибо категория является у него чем-то предшествующим, а диалектика реального мира—ее простым отблеском» (*Энгельс*). Природа поэтому, по Гегелю, сама по себе недиалектична. И диалектика природы—это не ее собственная диалектика, а диалектика *понятия* о природе. Недиалектично поэтому и отражающее эту природу естествознание. Гегелевская «Философия природы»—это не естественная наука, а часть его философской системы, т. е. науки о понятии. Диалектическое естествознание, как и диалектическая математика (как и диалектическое обществознание),—это, с точки зрения Гегеля, квадратный круг, хуже того—простая бессмыслица. В природе, по Гегелю, вещи лежат рядом друг с другом, и события происходят одно за другим внешне, безразлично друг к другу. Но в таком случае те «так называемые понятия», которыми оперируют математика и естествознание, тоже могут быть лишь внешними, лишь безразличными друг к другу. Понятия высшей математики проистекают из практики.

[1]) См. «Исторический очерк».

[2]) Ср. «Исторический очерк», раздел о рациональном дифференциальном исчислении

Гегель признает, что высшая математика стала возможна лишь потому, что в математику вошло движение. Но тем хуже для всех математиков, которые хотят «примирить» высшую математику с элементарной. Их попытки потерпели крушение, и не напрасно. Внутри математики нет связи, нет перехода, нет единства диалектического развития между элементарной математикой и высшей. Такая связь существует, но она нематематического характера. В системе гегелевской философии из экстенсивного количества развивается интенсивное, из последнего—дурная бесконечность, из дурной—истинная математическая бесконечность и т. д. Но это лишь в системе философии, а не в такой науке, как математика. Математики, по Гегелю, могут узнать из философии диалектику развития своих основных понятий, но никакая философия не может помочь им построить диалектическую математику. История бесплодных попыток обоснования анализа на почве самой математики подтверждает, с точки зрения Гегеля, это положение.

Отнюдь не так обстоит дело для Маркса. Из закономерной связи процессов природы следует закономерная связь их отражений в науке. Из диалектики развития природы следует диалектика развития отображающих эту природу понятий. Элементарная математика—не просто чепуха, которую нужно отбросить. Она выросла из материально-производственной практики человечества. Из этой же практики, но на более высокой основе, выросла и высшая математика, пользующаяся к тому же элементарной. Значит они должны быть связаны друг с другом, значит между ними должен существовать переход, единство диалектического развития, включающего не только тождество, но и различие. Математикам до сих пор не удалось вскрыть его не потому, что его нет, не потому, что это невозможно, а потому, что они были метафизиками, потому что они видели либо только различие, только специфичность математики бесконечного по сравнению с элементарной, только несводимость ее к последней (Ньютон и Лейбниц), либо только тождество (Лагранж).

Задача, поставленная себе Марксом в его математических работах, таким образом ясна теперь нам. Это—задача вскрыть диалектику развития, связывающую элементарную математику с высшей, показать то единство, тождество, которое существует между ними, и тот переворот, тот скачок, который с этим переходом (от алгебры к дифференциальному исчислению) связан. Найти то «самое простое, обычное, основное, самое массовидное, самое обыденное, миллиарды раз встречающееся», которое лежит еще в пределах обыкновенной алгебры, вскрыть «в этом простейшем явлении (в этой «клеточке») все противоречия (resp. зародыши всех противоречий)» дифференциального исчисления и показать в дальнейшем изложении «развитие (и рост и движение) этих противоречий»—эта ленинская характеристика поставленной себе Марксом в «Капитале» задачи может быть перенесена и на задачу, стоящую перед ним в отношении дифференциального исчисления.

III

Для того чтобы иметь возможность понять и правильно оценить математические работы Маркса, нужно представлять себе характер и содержание использованных им учебников. Как уже было отмечено, Маркс

приступил к работе по математике в конце 50-х годов, имел следовательно в своем распоряжении учебники первой половины XIX столетия. Из краткого перечня его математических рукописей мы могли убедиться, что в основном это были учебники Лакруа, Бушарла, Гайнда, отчасти Голла и Геммингa. Последних трех нет в нашем распоряжении. Однако марксовы конспекты дают о них достаточное представление и с большой степенью вероятности позволяют сделать вывод, что, подобно учебнику Бушарла, и они представляют собой простую компиляцию, в основе которой лежат оба учебника Лакруа: 1) большой трехтомный «Трактат о дифференциальном и интегральном исчислении» («Traite du calcul differentiel et du calcul integral» par S. F. Lacroix) и 2) элементарный трактат по тому же вопросу. Последний пользовался особенно большим успехом и популярностью. Он неоднократно переиздавался в течение всего XIX столетия, выдержал по меньшей мере 13 изданий и был переведен даже на русский язык[1]). Шестое издание этого трактата вышло в 1861 г. с дополнениями Эрмита и Серре[2]). Учебник этот вызвал большое число подражаний, нередко также пользовавшихся, несмотря на полное отсутствие оригинальности, большой популярностью. Среди последних раньше всего нужно упомянуть «Элементы дифференциального и интегрального исчисления» Бушарла. Недаром такое крупное издательство математической литературы, как Gauthier Villars, еще в 1881 г. предприняло девятое издание этого учебника (правда, уже с некоторою попыткою приспособить его к более новым взглядам). Особенно крупную роль сыграли однако учебники Лакруа в Англии, где они вытеснили распространенные до тех пор ньютонианские обозначения (и флюксии) и заменили их лейбницевскими (и дифференциалами). Знаменитый английский учебник Тодгюнтера также представляет собой подражание Лакруа. Таким образом для выяснения характера использованных Марксом учебников нам нужно обратиться раньше всего к учебникам Лакруа.

Задача, которую поставил себе Лакруа, охарактеризована им самим в предисловии к большому «Трактату» как стремление свести воедино огромный накопившийся к тому времени материал, эту «массу частных приемов, которые были связаны с детством исчислений» и были представлены под самыми разнообразными углами зрения, распространив на все «единообразное освещение, которое не давало бы заметить разницу между принадлежащим одному и заимствованным у другого автора».

В соответствии с этой задачей «Трактат» представляет собой «попрание» лагранжевскими «Теорией аналитических функций» и «Исчислением функций» эйлеровский курс дифференциального и интегрального исчислений («Institutiones calculi differentialis» и «Institutiones calculi integralis»).

По внешности определения основных понятий у Лакруа нередко совпадают уже с современными. По существу он еще обеими ногами

[1]) Под названием «Начальныя основанія дифференціальнаго изчисленія. Соч. С.Ф. Лакроя. Перевель с французскаго П. Смирновъ. Спб. Въ типографіи В. Плавильщикова. 1822 года».

[2]) Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral» par S. F. Lacroix. Sixième édition, revue et augmentée de notes par M. M. Hermite et J. A. Serret, membre de l'institut. Paris 1861.

стоит на почве математики XVIII столетия[1]). Так функция определяется им как «всякое количество, значение которого зависит от одного или нескольких других количеств, вне зависимости от того, известны или неизвестны те операции, при помощи которых переходят от последних к первому». Однако по существу для Лакруа при этом само собой разумеется, что функция есть некоторое аналитическое выражение, содержащее переменные величины, либо непосредственно алгебраическое, либо же выразимое рядом (трансцендентные функции). Возможность существования функций, не представимых степенным рядом, не приходила даже в голову Лакруа (как и математикам XVIII столетия вообще). Таким образом Лакруа не было известно различие между его определением функции и определением последней по Лангранжу[2]).

Вслед за Эйлером (и Д'Аламбером) производная определялась как предел, точнее, как значение дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x = 0$, под которым и понималось предельное значение отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при стремлени Δx к нулю. Определение предела при этом по видимости опять-таки не отличалось от распространенного и в наших современных учебниках. Именно предел некоторой переменной величины определялся как некоторая постоянная величина, к которой переменная приближается так, что разность «может быть сделана меньше любой данной величины, сколь бы мала эта последняя ни была» (Лакруа). Однако положительное содержание этого понятия о пределе было еще совершенно не выяснено. Предел понимался при этом как некоторая граница, заранее существующая наряду с данной переменной величиной и совершенно независимая от нее, к которой последняя может сколь угодно приближаться, никогда однако ее не достигая; как лишь чисто отрицательное выражение именно этой недосягаемости; как дно в бездонной бочке Даннаид, по выражению Вольтера; как выражение человеческой ограниченности и неспособности человеческого мозга, «имеющего приблизительно шесть дюймов в длину, пять в ширину и три в высоту в самых больших головах» (Вольтер), постичь бесконечное, через которое и происходит переход к пределу.

Благодаря этому сами строившие на этом понятии определение производной математики XVIII столетия не могли освободиться окончательно от представления о лишь приближенной точности дифференциального исчисления, несмотря на абсолютную точность его результатов,—настолько, что для объяснения последней Лакруа считал необходимым дать особое доказательство полной досягаемости отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ своего предельного значения в момент, когда Δx обращается наконец в нуль, «поправляя» Эйлера и Д'Аламбера Лангранжем. В самом деле, говорит Лакруа, Лагранж доказал справедливость, вообще говоря, равенства

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

---

[1]) Первое издание его большого «Трактата» вышло в 1797 г.

[2]) Как не было известно и Эйлеру, для которого их равнозначность также разумелась сама собой и не вызывала никаких сомнений.

Но в таком случае

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+f''(x)\frac{h}{1\cdot 2}+\ldots$$

и при h, равном нулю, когда левая часть обращается в $\frac{dy}{dx}$, правая совершенно точно дает $f'(x)$, так что мы получаем окончательно $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ как абсолютно точное соотношение.

Нечего и говорить, что всякая функция считалась не только непрерывной (о сколько-нибудь положительном выяснении смысла этого слова конечно не было и речи), но и диференцируемой, причем последнее обстоятельство рассматривалось как абсолютно достоверный, чуть ли не физический факт [1]).

Лакруа различает конечно сходящиеся и расходящиеся ряды. Однако, следуя Эйлеру, он считает возможным свободно пользоваться последними во всех случаях, когда речь идет не о вычислении значения величины, представленной рядом. Если «для того чтобы употреблять с полным правом некоторое аналитическое разложение,—пишет Лакруа,—нужно лишь убедиться в регулярности ряда, выражающего его, т. е. правильно констатировать закон, по которому образуются все его члены, то нужно тщательно исследовать сходимость численных рядов [когда речь идет о том], чтобы извлечь из них приближенные значения величины, от которой они происходят» [2]).

Мы видим таким образом, что Лакруа полностью стоит еще на так называемой «наивной» точке зрения, характерной для математики периода до Коши, лишь после работ которого начинается выяснение положительного смысла понятий предела и непрерывности,

[1]) «Геометры пришли к диференциальному исчислению от исследований касательно кривых линий... но в чем бы ни видеть происхождение этого исчисления, оно всегда будет покоиться непосредственно на некотором аналитическом факте, предшествующем всякой гипотезе, как падение тяжелого тела к поверхности земли предшествует всем объяснениям, которые на этот счет были даны; и этот факт есть именно свойство, которым обладают все функции, допускать предел отношения их приращений к приращениям переменной, от которой они зависят». «Под законом непрерывности нужно понимать тот, который наблюдается при описании линий движением и согласно которому последовательные точки одной и той же линии следуют друг за другом без какого бы то ни было промежутка. Способ рассматривать величины в исчислении не допускает повидимому этого закона, потому что всегда предполагают промежуток между двумя последовательными значениями одной и той же величины; но чем меньше этот интервал, тем больше мы приближаемся к закону непрерывности, которому предел соответствует полностью; именно в силу этого закона непрерывности приращения сохраняют еще и своем исчезновении предел, к которому они постепенно приближались до своего исчезновения» (Traité élementaire, II ed., p. 82,1806). В учебнике Бушарля проблема непрерывности вообще не подвергается обсуждению.

[2]) Лакруа правильно предлагает строго отличать «разложение» функции от ее значения». «Ибо ряд не всегда дает значение функции, к которой он принадлежит: иногда даже вместо того, чтобы больше приблизиться к нему, по мере того, как берут больше членов, оно удаляется от него беспрерывно». Тем не менее подобный ряд бывает «так тесно связан» с некоторой функцией, что «если бы какой-нибудь вопрос привел нас к нему», «мы были бы в праве заключить отсюда, что искомая функция есть та самая», с которой связан наш ряд; «или, если бы мы открыли какое-нибудь свойство» подобной последовательности членов, «мы могли бы утверждать, что оно принадлежит нашей функции» (из § 4 «Введения» к большому «Трактату», стр. 4—5). В такой общей форме это уже неправильно.

взаимоотношения между функцией в смысле соответствия и функцией как аналитическим выражением, роли сходимости рядов, связи между непрерывностью и диференцируемостью и т. д. и т. п.

Ни один из использованных Марксом учебников ни в одном из вышеуказанных отношении не отличается от учебников Лакруа, и это нужно иметь в виду при чтении математических работ Маркса. Быть может к этому нужно только добавить, что, если бы в последние годы жизни Маркс обратился к какому-нибудь более современному руководству [1]), он вряд ли получил бы в сколько-нибудь вразумительной форме подлинное выяснение новой точки зрения на принципы и методы диференциального исчисления. Ибо напуганные ее «трудностью» большие и «уважаемые» руководства конца XIX в. (и даже первых лет XX в.) предпочитали, в подавляющем большинстве случаев по крайней мере, обходить подводные камни этих трудностей при помощи выражения «ясно, что», тогда как учебники типа Лакруа давали еще и довольно обширные подчас исторические сведения по вопросу о принципах анализа и с полной откровенностью высказывали и защищали свою «наивную» точку зрения [2]).

После этих замечаний мы можем перейти к краткому изложению содержания математических работ Маркса, чтобы на фоне общей, суммарной, хотя по необходимости и неполной картины дать читателю возможность лучше ухватить роль, место и особенности той части этих рукописей, которая выше опубликована. Начнем с ранних работ Маркса.

Предварительно однако небольшая справка о лагранжевом «чисто алгебраическом» обосновании анализа. Желая освободиться, как уже было упомянуто, от трудностей, связанных с понятием «бесконечно малых», «исчезающих величин» и «пределов», Лагранж попытался заменить диференциальное исчисление некоторым эквивалентным, с его точки зрения, последнему исчислением аналитических (т. е. заданных каким-нибудь аналитическим выражением) функций. Он исходил при этом из предложения [3]), гласящего, что, вообще говоря (за исключением особых случаев), значение подобной функции для наращенного значения аргумента $(x+h)$ может быть разложено в ряд по целым и возрастающим степеням приращения h, т. е., что

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+\dots,$$

где p, q, $r\dots$ — функции одного только x.

---

[1]) Узко специальная журнальная литература была вообще доступна лишь очень ограниченному кругу математиков-специалистов.

[2]) Еще в 1895 г., т. е. через 22 года после выхода в свет работ Кантора, Дедекинда и Вейерштрасса, знаменитый немецкий математик Клей в своей статье об «арифметизации математики» отстаивал ту точку зрения, что преподавание анализа именно с этой «наивной» точки зрения и должно начинаться, ибо естественным будет такое обучение, при котором учащийся пройдет в сокращенном виде тот же самый путь развития, который пройден наукою в полном, на что в своем докладе «О числе и понятии предела в преподавании» (1898 г.) A. Pringsheim возражал ему, что, исходя из такой точки зрения, нужно сначала всерьез обучать учащегося тому, что солнце вращается вокруг земли и что теплота есть особый вид материи (а не движения).

[3]) Доказательство которого, данное им, в действительности неудовлетворительно.

Первую «произведенную» этим разложением новую функцию от x именно p, он называл «производной» от «первообразной» функции $y=f(x)$, вводя для этой «производной» символ $f'(x)$.

После этого он доказывал (рассматривая выражение $f(x+h+i)$ один раз как $f[x+(h+i)]$, а другой как $f[(x+i)+h]$ и приравнивая в соответствующих разложениях коэфициенты при одинаковых одночленах $h^m i$), что коэфициент при второй степени h (обозначенный через q) есть половина первой производной от предыдущего коэфициента (p), т. е. равен половине второй производной от первообразной функции, или $\frac{f''(x)}{1\cdot 2}$, коэфициент при h^3 равен $\frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3}$ и т. д., вообще коэфициент при h^n равен $\frac{f^{(n)}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$, или, иными словами, доказывал справедливость ряда Тэйлора:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2}+f'''(x)\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots,$$

из которого и выводил в дальнейшем все основные предложения своего исчисления функций. Разложение в строку Тэйлора было им таким образом положено в основу анализа.

IV

Вопрос о связи диференциального исчисления с алгеброй и о смысле и значении диференциальных символов встает перед Марксом, как уже было упомянуто, в самом начале его занятий математикой. Уже в первом, ранием конспекте, сопоставляя обычное в учебнике того времени определение производной с определением Лагранжа, Маркс характеризует первое, которому отдает предпочтение, хотя высоко оценивает примененный Лагранжем метод (как «важный с точки зрения более высоких задач исчисления»), следующим образом (чтобы дать возможность читателю выделить принадлежащее самому Марксу и составить себе по возможности наглядное представление об учебнике, которым он пользовался, приводим это место по марксову конспекту и параллельно по учебнику Бушарла):

Маркс:

«1) В основании, или исходном пункте, именно при нахождении диференциального коэфициента мы имели сначала [следующий] метод:
I) $y = f(x)$;
II) $y_1 = f(x+h)$,
если например было

$$y = f(x) = ax^2, \text{ то}$$
$$y_1 = f(x+h) = a(x+h)^2,$$

следовательно

$$y_1 = ax^2 + 2ahx + ah^2 \text{ и}$$
III) $y_1 - y = 2ahx + ah^2$.

Бушарла:

«3. Возьмем теперь уравнение

$$y=x^3 \qquad (1)$$

и допустим, что y становится y_1, когда x становится $x+h$; мы будем следовательно иметь

$$y_1=(x+h)^3$$

и разворачивая

$$y_1-y=3x^2h+3xh^2+h^3;$$

если мы от этого уравнения вычтем уравнение (1), останется

$$y_1-y=3x^2h+3xh^2+h^3,$$

Маркс:

Деля обе стороны на h, мы получили:

IV) $\frac{y_1 - y}{h} = 2ax + ah.$

$y_1 - y$ равно разности y (приращению y_1 по сравнению с y), следовательно $= \Delta y$; $x + h = x_1$, h равно разности $x_1 = \Delta x$ (именно = избытку x_1 над x).

Мы можем следовательно написать вместо $\frac{y_1 - y}{h} = 2ax + ah$:

V) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + ah.$

Первая сторона уравнения выражает отношение конечной разности функции y к конечной разности независимой переменной x. Если мы теперь положим $h = 0$, то получим:

VI) $\frac{0}{0} = 2hx.$

Это еще в пределах обыкновенной алгебры. Если мы имеем например

$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, то это $= \frac{(x + a)(x - a)}{x - a}$.

Следовательно $\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$,

так как на второй стороне

$$(x + a) \cdot \frac{x - a}{x - a} = (x + a) \cdot 1.$$

Если мы положим на обеих сторонах $x = a$, то получим: $\frac{0}{0} = 2a$.

Так как $\Delta x = h$, то, если $h = 0$, $\Delta x = 0$, и так как y становится y_1 лишь вследствие того, что x возросло на h, то $y_1 = y$, когда $h = 0$, т. е. $x + h = x$.

Итак $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$. В этой форме нет ничего, что было бы дано уравнением, она не содержит никакого следа ни функции, ни независимой переменной. В $\frac{0}{0}$ выражено, что обе разности Δy и

Бушарла:

и деля на h,

$$\frac{y_1 - y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2. \quad (2)$$

Посмотрим, чему учит нас этот результат: $y_1 - y$ выражает приращение функции y в силу приращения h, данного x, ибо эта разность $y_1 - y$ есть разность между новым состоянием величины y и ее первоначальным состоянием.

С другой стороны, из того, что приращение x есть h, следует, что выражение

$$\frac{y_1 - y}{h}$$

есть отношение приращения функции y к приращению переменной x. Рассматривая второй член уравнения (2), мы видим, что это отношение убывает по мере убывания h и что, когда h становится нулем, это отношение сводится к $3x^2$.

Это выражение $3x^2$ есть следовательно предел отношения $\frac{y_1 - y}{h}$: оно стремится к этому выражению, когда h заставляют убывать.

4. При предположении $h = 0$ приращение y также становится нулем и $\frac{y_1 - y}{h}$ сводится к $\frac{0}{0}$, почему уравнение (2) превращается в

$$\frac{0}{0} = 3x^2. \quad (3)$$

В этом уравнении нет ничего абсурдного, ибо алгебра учит нас, что $\frac{0}{0}$ может выражать любое количество. Впрочем следует заметить, что так как при делении обоих членов дроби на одно и то же число дробь не меняет своей величины, то отсюда следует, что

Маркс:

Δx исчезли. Но мы хотим фиксировать характер факторов, которые исчезли, хотим фиксировать их как исчезнувшие ([сохранить] в отрицании характер того, что отрицается), и поэтому пишем $\frac{dy}{dx}$ вместо $\frac{0}{0}$, вместо Δ у нас теперь d, вместо разности (диференции) ее уменьшительное — д и ф е р е н ц и а л.

Итак:

VII) $\frac{dy}{dx} = 2ax.$

Это показывает, во-первых, что члены, составляющие отношение, исчезают и что они исчезли как конечные или стали нулями, коль скоро мы имеем $2ax$; $2ax$ есть поэтому предел их изменения.

Этот диференциальный коэфициент имеет поэтому два выражения — одно, показывающее движение $\frac{dy}{dx}$, другое — его значение, его п р е д е л.

Что после того, как операции выполнены, исчезло, это dy и dx, которые равны нулю; и было бы ошибкой вычисления, если бы они не были сняты.

Единственная трудность поэтому в диалектическом понятии о сохраняющемся отношении между исчезнувшими количествами, и после того, как оно сослужило свою пользу, отношение $\left(\frac{0}{0}\right)$ исчезает таким образом в результате вычисления».

Бушарла:

малость членов дроби никак не влияет на ее величину и что следовательно последняя может оставаться тою же, когда члены дроби достигли последней степени малости, т. е. стали нулями.

Дробь $\frac{0}{0}$, фигурирующая в уравнении (3), есть символ, заменивший отношение приращения функции к приращению переменной; так как этот символ не оставляет никакого следа этой переменной, изобразим его через $\frac{dy}{dx}$; тогда $\frac{dy}{dx}$ будет нам напоминать, что функцией было y, а переменной x. Но от этого dy и dx не перестанут быть количественно нулями, и мы будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2. \qquad (4)$$

$\frac{dy}{dx}$ или, скорее, его величина $3x^3$ есть диференциальный коэфициент функции y».

Как мы увидим в дальнейшем, Маркс не удовлетворился этой постановкой вопроса [1]). Однако кое-что характерное для его будущей точки

[1]) Ибо здесь исходным пунктом является еще не чисто «алг браическая» — в смысле не предполагающей еще диференциального исчисления и его с мволики — задача произвести из одной функции другую — производную от нее, а отпра ляющиеся от этой символики задача раскрыть смысл некоторого символа. Именно, найти значение дроби $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, когда числитель и знаменатель ее обращается в нуль и вся дробь превращается в лишенный непосредственного смысла символ.

зрения уже здесь намечено. Вкратце оно сводится к тому, что 1) самый процесс нахождения производной (дифференциального коэфициента) не содержит в себе ничего выходящего за пределы обыкновенной алгебры (по крайней мере пока мы остаемся в пределах алгебраических функций); 2) существуют два выражения для дифференциального коэфициента: одно—показывающее его значение, его величину, другое—процесс его возникновения; 3) в качестве такого второго выражения символ $\frac{0}{0}$ оказывается неподходящим, так как не содержит ни малейшего следа того отношения конечных разностей функции и независимой переменной, из которого он происходит, и должен быть заменен поэтому символом $\frac{dy}{dx}$.

Занятый вопросом о происхождении диференциального исчисления, о связях его с элементарной математикой, Маркс естественно в первую очередь обращается к Лагранжу, к его попытке обосновать анализ на «чисто алгебраической» основе. Он заимствует у него понятие о производной функции как об аналитическом выражении, произведенном из некоторого другого (данного) аналитического выражения (первоначальной функции). Он считает, что Лагранжу удалось подвести в некотором смысле алгебраический базис под диференциальное исчисление. Однако уже в самых первых конспектах и записях Маркс совершенно определенно высказывается в том смысле, что Лагранж не разрешил до конца поставленной себе задачи: он пытался заменить диференциальное исчисление исчислением (первообразных и производных) функций, заранее отказавшись таким образом от задачи обоснования диференциального исчисления как такового, чтобы таким путем избавиться от «бесконечно малых», «исчезающих величин» и «пределов», а между тем не сумел обойтись без последних, как только речь зашла о приложениях. Самое исчисление функций, построенное им, оказалось очень сложным и громоздким, значительно уступающим в простоте и оперативности обычному диференциальному исчислению. Несмотря на то, что именно он дал чисто алгебраическое доказательство возможности, вообще говоря, разложения функции $f(x+h)$ в строку Тэйлора, он не заметил однако происхождения теоремы Тэйлора из бинома Ньютона, хотя именно он обнаружил и доказал необходимость того скачка из области алгебры постоянных величин в область алгебры переменных и от конечного многочлена к бесконечному ряду, которая связана с этим переходом от бинома Ньютона к ряду Тэйлора.

Прежде чем предоставить слово самому Марксу, заметим, что если в первых марксовых тетрадях Лагранж в центре внимания, вопрос о связи между строками Тэйлора и Маклорена лишь упомянут (во второй из них), то в третьей большой тетради, которая начинается все еще с того же вопроса о Лагранже, центр тяжести уже передвинулся с лагранжева обоснования ряда Тэйлора на принадлежащее самому Марксу. И наконец в первой законченной самостоятельной работе «Теорема Тэйлора, теорема Маклорена и теория производных функций Лагранжа» Лагранж вообще отодвинут под конец. Однако оценка его почти не меняется, почему мы и можем ограничиться цитатой именно из этой последней работы.

«Большая заслуга Лагранжа,—пишет Маркс,—заключается не только в обосновании с помощью чисто алгебраического анализа теоремы Тэйлора и вообще всего дифференциального исчисления, но особенно в введении им понятия производных функций, которое в действительности употребляется в большей или меньшей степени, явно или неявно, всеми его преемниками. Однако он этим не удовлетворился. Он разлагает чисто алгебраическим путем все возможные функции от $x+h$ по возрастающим целым и положительным степеням h, окрещивая затем [все полученные функции] именами из дифференциального исчисления. Все облегчения и сокращения, доставляемые самим дифференциальным исчислением (теорема Тэйлора и т. п.), при этом утрачиваются и очень часто заменяются алгебраическими операциями значительно более пространной и сложной природы.

Поскольку дело касается чистого анализа, Лагранж действительно отделался от всего того, что ему представляется метафизической трансцендентностью в ньютоновских флюксиях, лейбницевских бесконечно малых различных порядков, в теории предельных значений исчезающих величин, в существовании $\frac{0}{0}=\left(\frac{dy}{dx}\right)$ как символа дифференциального коэфициента и т. д. Однако это не мешает тому, что в приложениях своей теории к кривым и т. д. он сам постоянно нуждается в том или другом из этих «метафизических» представлений».

Марксу ясно таким образом, что Лагранж имеет большие заслуги в деле обоснования анализа, что он «дает дифференциальному исчислению алгебраический базис, но должен быть использован в этом отношении лишь как исходный пункт», именно, поскольку им введены понятия о производных и первообразной функциях и дано алгебраическое обоснование разложения в ряд Тэйлора. Однако основного звена, связывающего дифференциальное исчисление с алгеброй и лежащего в основе разложения в ряд Тэйлора, зародышевой формы этой основной теоремы дифференциального исчисления внутри обыкновенной алгебры Лагранж все же не подметил. Этим связующим звеном с точки зрения Маркса, характерной для его ранних самостоятельных работ, начиная уже с третьей тетради, служит теорема о биноме Ньютона, в которой он видит зародышевую форму строк Тэйлора и Маклорена и основу вообще всех методов дифференцирования. Он ссылается при этом на примечание, которое нашел у Бушарла во втором приложении к его Трактату по дифференциальному исчислению»[1]) и которое приводит (по-немецки) в этой третьей тетради. «За исключением дифференциалов круговых функций, пишет Бушарла,—которые легко получаются из формул тригонометрии, все остальные одночленные дифференциалы, как например для x^ε, a^n, $\log x$ и т. д., были развиты единственно из теоремы о биноме. Отсюда следует, что принципы дифференцирования покоятся единственно на теореме о биноме».

Уже во второй тетради Маркс замечает мимоходом, что не только бином Ньютона вытекает из строки Тэйлора, но и, наоборот, последняя из бинома Ньютона. В самом деле, если $f(x)$—функция, вообще говоря, могущая быть разложенной в ряд по степеням аргумента

[1]) Маркс часто называет цитируемое сочинение (по памяти повидимому) не вполне точно.

(только такими и занимались все математики XVIII в., в том числе и Эйлер, и Лагранж, и все построенные на их работах учебники не только XVIII, но и XIX в.), то мы в праве написать, как это делает Маркс, конспектируя повидимому какой-то учебник:

$$y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$$
$$y_1 = a(x+h)^{\alpha} + b(x+h)^{\beta} + c(x+h)^{\gamma} + \ldots$$
$$= ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$$
$$+ (\alpha a x^{\alpha-1} + \beta b x^{\beta-1} + \gamma c x^{\gamma-1} + \ldots)\frac{h}{1}$$
$$+ (\alpha(\alpha-1)ax^{\alpha-2} + \beta(\beta-1)bx^{\beta-2} + \gamma(\gamma-1)cx^{\gamma-2} + \cdots)\frac{h^2}{1\cdot 2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Или

$$y_1 = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$

Этот же вывод он повторяет в следующей, третьей тетради, добавляя в конце: «Таков прямой вывод теоремы Тэйлора из предложения о биноме». Так как клеточной формой всякой функции является степенная $y = ax^m$, Маркс и обращается к ней и подвергает ее подробнейшему исследованию, стремясь вскрыть связь между биномом Ньютона и строками Тэйлора и Маклорена в наипростейшей, зародышевой ее форме.

Простое различие в форме $x + c$ или $c + x$ обусловливает, с точки зрения Маркса, в зародыше различие между строками Тэйлора и Маклорена. Ибо первая (с заменою c на h) приводит к формуле:

$$(x+h)^m = x^m + mx^{m-1}h + m(m-1)x^{m-2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots$$
$$= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

где $f(x) = x^m$ (Тэйлор). Вторая же — к формуле:

$$(c+x)^m = c^m + mc^{m-1}x + m(m-1)c^{m-2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots$$
$$= f(0) + f'(0)\cdot x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots,$$

где $f(x) = (c+x)^m$ (Маклорен).

Все это представляется настолько простым и ясным, что Маркс даже ставит перед собой вопрос, не пришел ли в действительности Тэйлор именно таким путем к своей теореме, по крайней мере для себя, приватным образом. И он не сразу отвечает отрицательно на этот вопрос, который несколько раз поднимает на протяжении третьей тетради, ни разу еще однако не давая на него ответа. Этим вопросом и оканчивается работа. «Но теорема о биноме,—пишет Маркс,—служила не для одного только развития общей теории уравнений, комбинаторики, тригонометрических, показательных и т. д. функций; она есть общий базис дифференциального исчисления, и по праву встает поэтому вопрос, не пришли ли сами Ньютон, открывший как теорему о биноме, так и дифференциальное исчисление, или по меньшей мере его ученики Тэйлор и Маклорен (первый хронологически раньше второго), необычайно облегчившие своими обобщающими формулами техническое применение дифференциального исчисления, к своим результатам втихомолку через применение теоремы о биноме».

В следующей, по всей видимости, работе о теоремах Тэйлора и Маклорена и теории производных функций Лагранжа Маркс подвергает обсуждению весь этот комплекс вопросов в развернутой и систематической форме. Работа начинается словами:

«Ньютоновское открытие теоремы о биноме (применяемой также и к полиномам) революционизировало всю алгебру, ибо оно впервые сделало возможной общую теорию уравнений. Но теорема о биноме — и это было решительно признано математиками, особенно начиная с Лагранжа — составляет также главную основу дифференциального исчисления. Уже поверхностный взгляд показывает, что за исключением круговых функций, полученных из тригонометрии, все дифференциалы одночленов, x^n, a^x, $\log x$ etc., выводятся из одной только теоремы о биноме.

Теперь даже в учебниках вошло в моду доказывать, что как из теорем Тэйлора и Маклорена можно вывести теорему о биноме, так и наоборот. Однако нигде, даже у самого Лагранжа, теория производных функций которого дала дифференциальному исчислению новый базис, эта связь между теоремой о биноме и этими двумя теоремами не выяснена во всей ее первобытной простоте. Здесь, как и повсюду, важно сорвать с науки покров тайны».

Называя, с одной стороны, теорему Тэйлора «простым переводом теоремы о биноме Ньютона с языка алгебры на язык дифференциального исчисления», Маркс замечает однако, что этот «перевод» предполагает переход от алгебры постоянных величин к алгебре переменных (функций) и от конечных многочленов к бесконечным рядам, после чего дает подробный критический разбор ошибочно приписываемого им самому Тэйлору доказательства (методом неопределенных коэфициентов) посредством двойного дифференцирования — один раз по x, другой по h (с последующим приравниванием результатов) — уравнения

$$f(x+h)=A+Bh+Ch'+\ .\ .\ .,$$

которое Маркс справедливо считает недоказанным, хотя именно в нем основа всего вывода.

В части, посвященной теореме Маклорена, Маркс подробно останавливается на роли этой теоремы в алгебре, обращая внимание на то, что к задаче дифференцирования приводят уже стоящие внутри самой алгебры задачи (определения кратных корней и т. п.). Работа заканчивается ответом на оставшийся открытым в предыдущей работе вопрос.

«Не получил ли уже Ньютон, сообщая миру лишь результаты, как он это делает например в труднейших случаях в «Arithmetica universalis», втихомолку для своего личного употребления теоремы Тэйлора и Маклорена из открытой им теоремы о биноме?

На это следует с абсолютной достоверностью ответить отрицательно: он не был расположен (соответствующее слово не расшифровано.— *С. Я.*) предоставить своим ученикам возможность присвоить такое открытие. В действительности он был еще слишком поглощен разработкой самих дифференциальных операций, которые у Тэйлора и Маклорена предполагаются как данные и известные. Кроме того Ньютон, как показывают первые его элементарные формулы, очевидно пришел к ним сперва от механических, а не принадлежащих чистому анализу исходных положений.

Что касается, напротив, Тэйлора и Маклорена, то они с самого начала работали и действовали на почве самого дифференциального исчисления и поэтому не имели никакого повода к тому, чтобы искать возможно более простых алгебраических истоков этого исчисления тем более, что спор между ньютонианцами и лейбницианцами вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как новооткрытой, совершенно особой, как небо от земли отличной от обыкновенной алгебры математической дисциплины.

Связь их исходных уравнений с теоремой о биноме, разумелась для них сама собой. Однако не более чем например при дифференцировании xy или $\frac{x}{y}$ само собой разумеется, что это—выражения, доставленные обыкновенной алгеброй. Действительные и потому простейшие связи нового со старым всегда открываются лишь, когда самое новое принимает уже законченные формы, и можно сказать, что дифференциальное исчисление приобрело эту связь через теоремы Тэйлора и Маклорена. Поэтому лишь Лагранжу удалось свести дифференциальное исчисление к строго алгебраическому базису. Быть может ему предшествовал в этом отношении Джон Ланден, английский математик середины XVIII в., в его «Residual Analysis». Но прежде чем судить об этом, я должен просмотреть эту книгу в Музее».

V

У Лагранжа теорема Тэйлора была базисом всего анализа. Он считал поэтому, что достаточно дать «алгебраическое» (т. е. не опирающееся еще на «высший анализ») обоснование этой теоремы, чтобы обосновать таким образом анализ. Уже в ранний период своих занятий математикой Маркс видит в этой теореме не исходный пункт, а завершение дифференциального исчисления. Он рассматривает ее не как средство для нахождения последовательных производных функции путем предварительного разложения последней в ряд, а, наоборот, как оперативную формулу, дающую способ разложения функции, последовательные производные которой уже известны. Она таким образом предполагает уже уменье дифференцировать—то, что Маркс называет «арифметикой» дифференциального исчисления (с аналогичной таблице умножения обыкновенной арифметики таблицей дифференциалов элементарных функций). И Маркс исходит уже из этого уменья в своем выводе теоремы Тэйлора из бинома Ньютона. Обоснование теоремы Тэйлора не есть еще таким образом обоснование дифференциального исчисления, а подмеченная Бушарла роль бинома Ньютона в процессе нахождения производных элементарных функций сама нуждается еще в объяснении, в выяснении вопроса о действительной необходимости применения бинома Ньютона для нахождения этих производных. В результате ранних работ выяснена таким образом необходимость вскрыть сущность дифференцирования, происхождение и связь дифференциального исчисления с алгеброй, его собственный смысл независимо от пути, по которому пошел Лагранж, и от той связи с алгеброй, которая обнаружилась в теоремах Тэйлора и Маклорена.

Именно этой задаче, как уже было указано, и посвящена основная часть

математических работ Маркса, которую он счел необходимым довести до сведения Энгельса и которая почти полностью приводится ниже.

Мы видели, что Маркс уже в первом конспекте обратил внимание на смысл символа $\frac{dy}{dx}$, на вопрос о необходимости перехода к нему от символа $\frac{0}{0}$, что к тому же вопросу он вернулся и во втором конспекте. В чем суть однако самих ведущих к этим символам операций? Самого того процесса, результатом которого эти символы являются? Таков первый вопрос, который стоит перед Марксом в этой связи. Чтобы сделать читателю более понятным ответ, который дает Маркс, остановимся вкратце на марксовом понимании функции.

В выражении $y = f(x)$, где правая часть есть некоторое аналитическое выражение, содержащее x, Маркс различает левую и правую сторону. Левую (y) он называет функцией *от* x (*von* x) в смысле выражения зависимости, правую [$f(x)$] функцией *в* x (*in* x) в смысле аналитического выражения, содержащего x, т. е. функцией в том смысле, какой придавал этому слову Лагранж. «Первообразная» и «производная» [$f(x)$ и $f'(x)$] функции и суть именно функции в этом последнем смысле слова, т. е. функции в x (*in* x), и первая, исходная задача дифференциального исчисления и есть задача определения новой «производной» функции по данной «первообразной».

«Первоначально,—пишет Маркс в введении к позднейшей работе о теореме Тэйлора,—слово «функция» было введено в алгебру при обсуждении так называемых неопределенных уравнений, число которых меньше числа входящих в них неизвестных. Здесь значение y, например, меняется при постановке вместо x, например, численных значений 3, 4, 5, и т. д. y назывался здесь функцией от x (*von* x), ибо он должен подчиняться его приказу, подобно тому как всякий функционер—даже сам великий Вильгельм I—от кого-нибудь зависит (von somebody abhangt). В соответствии с этим в диференциальном исчислении слово «функция» и было перенесено в этом смысле на зависимую переменную, например y».

Так в уравнении $y = 5x^4$ y означает функцию от x, «и притом ту функцию от x, которая дана через определенное выражение $5x^4$, ибо значение y меняется с тем изменением значения, которое x производит своим изменением в своем собственном выражении $5x^4$».

«Некоторое до сих пор продолжающееся смешение произошло однако, когда Лагранж ввел определение «производных» функций, а с ними и первообразной функции, из которой они произведены. Лагранжева функция перешла в современные трактовки исчисления, где однако сохранилось одновременно и прежнее значение слова «функция».

«Смешение можно устранить лишь тем, что мы читаем: y—функция *от* x, т. е. зависимая от x... равна первообразной функции *в* x. И также в отношении производных—y всегда функция от x, они же функции в x. Слово «функция» в последнем смысле означает для первообразной функции «алгебраическую» комбинацию, в которой x выступает первоначально, например $5x^4$, для производных функций новые значения, выступающие вместо $5x^4$ вследствие изменений x и соответствующих им дифференцирований».

Под дифференцированием же Маркс понимает операцию, состоящую в полагании и снятии разности (дифференции). Итак, «производная» есть новая функция, произведенная из данной в

Что касается, напротив, Тэйлора и Маклорена, то они с самого начала работали и действовали на почве самого дифференциального исчисления и поэтому не имели никакого повода к тому, чтобы искать возможно более простых алгебраических истоков этого исчисления тем более, что спор между ньютонианцами и лейбницианцами вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как новооткрытой, совершенно особой, как небо от земли отличной от обыкновенной алгебры математической дисциплины.

Связь их исходных уравнений с теоремой о биноме, разумелась для них сама собой. Однако не более чем например при дифференцировании xy или $\frac{x}{y}$ само собой разумеется, что это—выражения, доставленные обыкновенной алгеброй. Действительные и потому простейшие связи нового со старым всегда открываются лишь, когда самое новое принимает уже законченные формы, и можно сказать, что дифференциальное исчисление приобрело эту связь через теоремы Тэйлора и Маклорена. Поэтому лишь Лагранжу удалось свести дифференциальное исчисление к строго алгебраическому базису. Быть может ему предшествовал в этом отношении Джон Ланден, английский математик середины XVIII в., в его «Residual Analysis». Но прежде чем судить об этом, я должен просмотреть эту книгу в Музее».

V

У Лагранжа теорема Тэйлора была базисом всего анализа. Он считал поэтому, что достаточно дать «алгебраическое» (т. е. не опирающееся еще на «высший анализ») обоснование этой теоремы, чтобы обосновать таким образом анализ. Уже в ранний период своих занятий математикой Маркс видит в этой теореме не исходный пункт, а завершение дифференциального исчисления. Он рассматривает ее не как средство для нахождения последовательных производных функции путем предварительного разложения последней в ряд, а, наоборот, как оперативную формулу, дающую способ разложения функции, последовательные производные которой уже известны. Она таким образом предполагает уже уменье дифференцировать—то, что Маркс называет «арифметикой» дифференциального исчисления (с аналогичной таблице умножения обыкновенной арифметики таблицей дифференциалов элементарных функций). И Маркс исходит уже из этого уменья в своем выводе теоремы Тэйлора из бинома Ньютона. Обоснование теоремы Тэйлора не есть еще таким образом обоснование дифференциального исчисления, а подмеченная Бушарла роль бинома Ньютона в процессе нахождения производных элементарных функций сама нуждается еще в объяснении, в выяснении вопроса о действительной необходимости применения бинома Ньютона для нахождения этих производных. В результате ранних работ выяснена таким образом необходимость вскрыть сущность дифференцирования, происхождение и связь дифференциального исчисления с алгеброй, его собственный смысл независимо от пути, по которому пошел Лагранж, и от той связи с алгеброй, которая обнаружилась в теоремах Тэйлора и Маклорена.

Именно этой задаче, как уже было указано, и посвящена основная часть

математических работ Маркса, которую он счел необходимым довести до сведения Энгельса и которая почти полностью приводится ниже.

Мы видели, что Маркс уже в первом конспекте обратил внимание на смысл символа $\frac{dy}{dx}$ на вопрос о необходимости перехода к нему от символа $\frac{0}{0}$, что к тому же вопросу он вернулся и во втором конспекте. В чем суть однако самих ведущих к этим символам операций? Самого того процесса, результатом которого эти символы являются? Таков первый вопрос, который стоит перед Марксом в этой связи. Чтобы сделать читателю более понятным ответ, который дает Маркс, остановимся вкратце на марксовом понимании функции.

В выражении $y = f(x)$, где правая часть есть некоторое аналитическое выражение, содержащее x, Маркс различает левую и правую сторону. Левую (y) он называет функцией *от x* (*von x*) в смысле выражения зависимости, правую [$f(x)$] функцией *в x* (*in x*) в смысле аналитического выражения, содержащего x, т. е. функцией в том смысле, какой придавал этому слову Лагранж. «Первообразная» и «производная» [$f(x)$ и $f'(x)$] функции и суть именно функции в этом последнем смысле слова, т. е. функции в *x* (*in x*), и п е р в а я, и с х о д н а я задача дифференциального исчисления и есть задача определения новой «производной» функции по данной «первообразной».

«Первоначально,—пишет Маркс в введении к позднейшей работе о теореме Тэйлора,—слово «функция» было введено в алгебру при обсуждении так называемых неопределенных уравнений, число которых меньше числа входящих в них неизвестных. Здесь значение y, например, меняется при постановке вместо x, например, численных значений 3, 4, 5, и т. д. y назывался здесь функцией от x (*von x*), ибо он должен подчиняться его приказу, подобно тому как всякий функционер—даже сам великий Вильгельм I—от кого-нибудь зависит (von somebody abhangt). В соответствии с этим в дифференциальном исчислении слово «функция» и было перенесено в этом смысле на зависимую переменную, например y».

Так и уравнение $y = 5x^4$ y означает функцию от x, «и притом ту функцию от x, которая дана через определенное выражение $5x^4$, ибо значение y меняется с тем изменением значения, которое x производит своим изменением в своем собственном выражении $5x^4$».

«Некоторое до сих пор продолжающееся смешение произошло однако, когда Лагранж ввел определение «производных» функций, а с ними и первообразной функции, из которой они произведены. Лагранжева функция перешла в современные трактовки исчисления, где однако сохранилось одновременно и прежнее значение слова «функция».

«Смешение можно устранить лишь тем, что мы читаем: y—функция *от x*, т. е. зависимая от *x*... равна первообразной функции *в x*. И также в отношении производных—y всегда функция от x, они же функции в x. Слово «функция» в последнем смысле означает для п е р в о о б р а з н о й ф у н к ц и и «алгебраическую» комбинацию, в которой x выступает первоначально, например $5x^4$, для п р о и з в о д н ы х ф у н к ц и й новые значения, выступающие вместо $5x^4$ вследствие изменений x и соответствующих им дифференцирований».

Под д и ф ф е р е н ц и р о в а н и е м же Маркс понимает операцию, состоящую в п о л а г а н и и и с н я т и и р а з н о с т и (диференции). Итак, «производная» есть новая функция, п р о и з в е д е н н а я из данной в

результате изменения независимой переменной и соответствующих этому изменению дифференцирований.

Самый процесс порождения этой новой функции Маркс понимает при этом как диалектический, состоящий в полагании и снятии конечных (т. е. не бесконечно малых и не равных нулю) разностей, как результат некоторого двойного отрицания, сущность которого выясним на простом примере.

Пусть $y = ax^3$ и пусть происходит изменение независимой переменной, в результате которого x превращается в x_1 и значит $y = ax^3$ соответственно в $y_1 = ax_1^3$, и образуются конечные разности $\Delta x = x_1 - x$ и $\Delta y_1 = y_1 - y = a(x_1^3 - x^3)$.

Если бы мы теперь произвели дифференциальный процесс,—говорит Маркс,—т. е. «сняли» бы обратно эти разности, вернувши x_1 к его первоначальному состоянию x, то и y_1 превратилось бы обратно в y, и наше равенство

$$y_1 - y = a(x_1^3 - x^3) \qquad (1)$$

в

$$0 = 0.$$

«Сначала полагание разности, а затем обратное ее снятие приводит таким образом буквально к ничему. Вся трудность в понимании дифференциальной операции (как и всякого отрицания отрицания вообще) и состоит как раз в том, чтобы увидеть, чем она отличается от такой простой процедуры и как ведет поэтому к действительным результатам».

Если мы поделим однако обе стороны равенства (1) на $x_1 - x$, что мы вправе сделать, ибо x_1 не равно x, т. е. $x_1 - x$ не равно 0, то получим:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a(x_1^3 - x^3)}{x_1 - x} = \frac{a(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2)}{x_1 - x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2)$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2).$$

Фигурирующую на правой стороне этого равенства функцию двух переменных x и x_1: $a(x_1^2 + x_1 x + x^2)$ Маркс называет «предварительной» производной.

Лишь теперь мы можем предпринять дифференциальную операцию, т. е. «снять» положенные раньше конечные разности Δx и Δy. «Снятие» это Маркс рассматривает при этом в двух формах: положительной, состоящей в обратном приравнивании $x_1 = x$, и отрицательной,—обращении в нуль разности $x_1 - x$, а следовательно и $y_1 - y$.

В результате этого «снятия» в положительной форме, т. е. обращениях x_1 в x, на правой стороне равенства (2) мы получаем:

$$a(x^2 + xx + x^2) \text{ или } 3ax^2,$$

т. е. новую произведенную от первоначальной функцию того же переменного x, которую Маркс и называет «производной» функцией. Левая же обращается при этом в $\frac{0}{0}$ — символическое выражение, не имеющее

никакого самостоятельного смысла, но отражающее (в отрицательной форме) происходящий на правой (положительный) процесс. В силу того, что оно плохо отражает этот процесс, не выражает качественной стороны, происхождения производной из отношения конечных разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Маркс и заменяет его более выразительным символом $\frac{dy}{dx}$, выражающим одновременно и происхождение производной из отношения конечных разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и то, что она получена лишь в результате «снятия» последних (что и выражено буквою «d» вместо греческой «Δ»),

Реальный, положительный процесс происходит таким образом лишь на правой, «алгебраической», т. е. не содержащей никаких специфических для диференциального исчисления символов, стороне, между тем как левая дает лишь символическое отражение происходящего на правой реального процесса. Инициатива таким образом находится на правом, «алгебраическом», полюсе, и Маркс называет иногда весь этот процесс «алгебраическим диференцированием».

Попробуем теперь сформулировать марксово определение производной в общем виде:

Пусть $y=f(x)$ и x изменяется, принимая отличное от x значение x_1. Тогда и $y=f(x)$ изменяется в $y_1=f(x_1)$, в результате чего образуются разности Δx и Δy, из которых первая во всяком случае отлична от нуля. Если теперь их отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ может быть представлено в виде некоторой функции $f^1(x_1, x)$, для всех значений $x_1 \neq x$ равной $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, а при $x_1=x$ имеющей определенное значение (непрерывность подразумевается), то значение этой функции $f^1(x_1, x)$ (которую Маркс называет «предварительной производной») при $x_1=x$ и есть произвольная функция от первообразной $y=f(x)$.

Сам Маркс не останавливается в развернутой форме на значении всего этого процесса нахождения производной. Тем ценнее для нас замечание Энгельса в посвященном марксовым метематическим рукописям письме (от 18 августа 1881 г.).

Энгельс пишет:

«Когда мы говорим, что в формуле $y=f(x)$ x и y являются переменными, то это, пока мы не идем дальше, является утверждением, не имеющим никаких дальнейших последствий, и x и y все еще остаются временно, фактически постоянными величинами. Только тогда, когда они действительно изменяются, т. е. изменяются внутри функции, они становятся на деле переменными, и только тогда может проявиться скрытое еще в первоначальном уравнении отношение не двух величин как таковых, а их изменяемости. Первоначально выведенная формула $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ показывает это отношение, как оно происходит в ходе действительного изменения, т. е. в каждом данном изменении; окончательно выведенная формула $\frac{dy}{dx}$ показывает его в общей форме, в чистом виде, а потому мы можем притти от $\frac{dy}{dx}$ к какому угодно $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, тогда как эта последняя формула всегда соответствует лишь отдельному случаю.

Но чтобы от отдельного случая притти к всеобщему отношению, надо чтобы этот отдельный случай был «снят» как таковой. Итак, после того, как функция проделала со всеми его последствиями процесс от x к x_1, можно спокойно дать x_1 превратиться опять в x; это уже не прежнее, лишь по названию переменное x, оно претерпело действительное изменение, и результат изменения остается, если мы даже снова его «снимем»[1]).

Современная математика тоже определяет производную фактически при помощи некоторого диалектического процесса, состоящего сначала в полагании конечных разностей, а затем их «снятии», которое осуществляет однако не в форме обратного приравнивания x_1 к x или Δx нулю, а в форме «предельного перехода по Δx к нулю». Почему Маркс избегает определения производной как предела?

Маркс отвечает почему: он хочет избежать «увертки насчет лишь бесконечного приближения»[2]), которая, как мы уже видели из характеристики учебника Лакруа, действительно тяготела над этим определением, создавая впечатление о лишь приближенном характере формул диференциального исчисления. И Энгельс замечает по этому поводу, характеризуя метод Маркса: «Этот метод заслуживает величайшего внимания, в особенности потому, что здесь ясно доказано, что обычный метод с опущением dx, dy и т. д. положительно неправилен. Особенно великолепно при этом, что только когда $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ и только тогда операция оказывается математически абсолютно правильной».

Наконец в заметке, сохранившейся лишь отчасти (и вообще довольно неясно написанной), Маркс характеризует понятие предела как «могущее быть неправильно истолкованным и постоянно так и истолковывающееся». Насколько можно понять, Маркс подчеркивает при этом многозначность самого слова «предел», которое то понимается как недосягаемая граница, то как предел изменений, т. е. некоторое ограничение, наложенное на возможные изменения величины, например требование, чтобы она удовлетворяла какому-нибудь соотношению, то наконец в том смысле, в каком употребляют это слово, когда говорят: «π лежит в пределах между 3,14 и 3,15». В соответствии с этим и производную можно было бы двояким способом определить как предел: 1) либо как предел отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, когда h стремится к нулю, к которому это отношение стремится, обычно никогда не достигая его, 2) либо из соотношения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + f''(x)\frac{h}{1.2} + \ldots,$$

при постоянном h, из которого следует, что $f'(x)$ есть лишь приближенное значение для отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, т. е. в том смысле в каком 3,14 есть «предел» для π.

---

1) Ср. марксово замечание по этому поводу в работе о диференцировании элементарных функций.

2) Вот это место полностью: «Для получения «производной» необходимо положить $x_1 - x$, стало быть, в строгом математическом смысле $x_1 - x = 0$ без всяких увертюр насчет лишь бесконечного приближения».

Сравнивая наконец на примере диференцирования степенной функции свой метод с методом Д'Аламбера (который Маркс справедливо называет общераспространенным), Маркс подчеркивает, что в последнем положительный момент диференциальной операции, именно превращение x_1 обратно в x, нигде не выступает наружу, что все дело сводится не к диференцированию, а к простому применению бинома Ньютона, и не развитию, а лишь высвобождению окончательной производной из того контекста, в котором она уже в совершенно готовом виде фигурирует при этом в «предварительной производной». Подробнее об этом однако при изложении исторического очерка Маркса.

VI

В результате «алгебраического диференцирования» мы пришли к соотношению

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \tag{1}$$

полученному окончательно из промежуточной формы

$$\frac{0}{0} = f'(x). \tag{2}$$

Переход от этой последней к первой дал нам однако не только возможность лучшего символического отображения некоторого реального процесса. Выражение (1) имеет еще одно решительное и очень важное преимущество перед выражением (2). Именно—в то время как с последним нельзя обращаться, как с обыкновенным равенством, ибо, освободивши его от знаменателя, мы получим лишь $0 = f'(x) \cdot 0$ или $0 = 0$, с чем «ничего не поделаешь»,—с первым это уже возможно. Потому что в то время как из $0 = 0$ никак не получить обратно $\frac{0}{0} = f'(x)$, — от выражения

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{3}$$

которое получается в результате освобождения символического равенства (1) от знаменателя по правилам обыкновенной алгебры, всегда можно притти обратно к

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

так как выражение (3) «есть лишь другая его форма». После того как найдено выражение $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ (левую часть которого, как уже было упомянуто, Маркс называет символическим диференциальным коэфициентом, которому на правой противостоит «производная», или «реальный диференциальный коэфициент»), мы вправе поэтому сделать еще один, последний шаг и перейти к соотношению

$$dy = f'(x)\,dx,$$

которое Маркс и называет диференциалом.

Пока однако только вправе. Необходимость такого перехода, его смысл и значение лишь нужно еще обосновать. Проблеме дифференциала и дифференциального исчисления как такового и посвящена следующая, вторая часть опубликованных выше рукописей Маркса.

Перед нами задача дифференцирования произведения — функции $y=uz$, где u и z в свою очередь функции некоторой переменной x. Мы ищем производную от y (которая в таком случае сама есть также функция от x) по x. Применяя тот же метод, что и раньше, мы получаем однако

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}, \qquad (4)$$

и в отличие от рассмотренных ранее случаев реального выражения производной нет не только на левой, но и на правой стороне. Обе они заняты символами. И «хотя природа $\frac{du}{dx}\cdot\frac{dz}{dx}$. т. е. вообще символических дифференциальных коэфициентов, ничуть не меняется, если они появляются внутри самой производной, т. е. и на правой стороне дифференциального уравнения,—тем не менее этим изменяется их роль, а также характер уравнения».

Если стоящее на левой стороне уравнения $\frac{dy}{dx}$ играет ту же роль, какую играло раньше (в выражении $\frac{dy}{dx}=f'(x)$), то с $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{du}{dx}$ дело обстоит иначе. «Вместе с другими элементами производной $f'(x)$, в которую они включены, они находят в $\frac{dy}{dx}$ свое символическое выражение, свой символический эквивалент, но сами они, со своей стороны, не противостоят никаким $f'(x)$, $\varphi'(x)$, для которых они были бы символическими двойниками. Односторонне появились они на свет. Тени без тела, которое их отбрасывает; символические диференциальные коэфициенты без реальных диференциальных коэфициентов, т. е. без соответствующих эквивалентных производных».

В чем же смысл полученного равенства (4)?—Оно представляет собой «оперативную формулу», указывающую «стратагему действий», которые нужно произвести, чтобы получить производную произведения. Оно говорит нам, что этой цели можно достичь, если помножить соответственно производную каждого множителя на другой и сложить полученные результаты. Но вместе с этим обернулась и стоящая перед нами задача: мы уже ищем теперь не символический эквивалент некоторого реального процесса, а реальный эквивалент некоторого символического выражения. «Символический диференциальный коэфициент становится таким образом самостоятельным исходным пунктом. Его реальный эквивалент лишь должен быть найден. Таким образом инициатива передвинулась с правого, алгебраического полюса на левый, символический», и мы вступили наконец в результате этого переворота в методе на собственную почву дифференциального исчисления. Ибо при этом «диференциальное исчисление выступает как некоторое специфическое исчисление, уже самостоятельно оперирующее на своей собствен-

ной почве. Потому что его исходные пункты $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины. И это обращение метода получилось здесь как результат алгебраического диференцирования uz. Таким образом *алгебраический метод сам собой превращается в противоположный ему дифференциальный*».

«Возникший первоначально как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций диференцирования, символический диференциальный коэфициент играет теперь роль символа операций диференцирования, которые лишь нужно еще произвести. Вместе с тем уравнение

$$\frac{du}{dx} = z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx}, \tag{4}$$

с самого начала чисто символическое, так как не имеет свободной от символов стороны,—превращается в общее *символическое оперативное уравнение*.

Простейшим таким уравнением является уже *диференциал*

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{3}$$

Больше того, выраженное в диференциальных коэфициентах соотношение (4) само тоже достигает наибольшей общности, лишь будучи выражено в диференциалах:

$$dy = z\,du + u\,dz, \tag{5}$$

ибо в этой форме оно не зависит от выбора независимой переменной.

Именно в силу этой инвариантности по отношению к выбору независимой переменной, этой независимости от того, является ли переменная, по которой диференцируют, независимой переменной или функцией другой переменной величины,—наилучшим выражением для оперативных формул диференциального исчисления является их выражение не в диференциальных коэфициентах, а в *диференциалах*. Если до сих пор основными понятиями у нас были производная и «диференциальный коэфициент», то для диференциального исчисления специфично уже применение *диференциалов*.

Итоге: задача отыскания по данной функции некоторой другой функции, «произведенной» из нее, сама по себе не выходящая еще из области «алгебры переменных величин» и не требующая для своего решения никаких «диференциалов», «бесконечно малых», «исчезающих величин», вообще ничего символического и таинственного, приводит однако к некоторому «трансцендентальному или символическому заключению» на левой стороне уравнения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^1(x_1, x),$$

где f^1 (x_1, x)—«предварительная производная», именно, обращению ее в $_0^0$, но уже потерявшему «свой ужасающий вид», ибо выступает теперь лишь как выражение процесса, реальное содержание которого уже обнаружено на правой стороне уравнения. Новорожденное—в результате диалектического процесса отрицания отрицания—символическое дитя является пока лишь скромным спутником реального процесса порождения

«производной», лишь его тенью, его отражением. Оно становится на собственные ноги только в результате «переворота в методе», сущность и содержание которого могут быть выяснены уже на такой простой задаче, как проблема диференцирования произведения. Исходным пунктом делаются теперь сами символические выражения, и исследованию подвергаются уже соотношения между ними. Сущность выражающих эти соотношения формул состоит при этом не столько в том, что они дают нам правильные с количественной точки зрения равенства, сколько в том, что они представляют собой «оперативные формулы», указывающие «стратагему действия» для лишь подлежащих еще выполнению операций.

Благодаря этому исследованию происхождения специфических для диференциального исчисления понятий и символов снимается мистический покров с операций диференциального исчисления и понятия о диференциале, выступающего не как исходный пункт, а как производное понятие от производной.

Между тем исторически задача была поставлена не так. Исходным пунктом непосредственно, с самого начала, был диференциал, который существовал заранее, до каких бы то ни было изменений переменной величины, наряду с нею, но существование которого именно в силу этой невыясненности его происхождения представляло собой мистическую тайну. Приходилось допускать существование каких-то особых, таинственных, отличных от обыкновенных, математических величин («бесконечно малых», или «моментов»), которые то можно было отбрасывать, не нарушая точности равенства, то нужно было принимать в расчет как обыкновенные величины, которые были, иными словами, и нулями и не нулями одновременно, без какого бы то ни было перехода, превращения из одних в другие[1]). Именно эта невыясненность корней диференциального исчисления, той цепи диалектического развития, которая соединяет друг с другом и с «алгеброй» (в смысле не предполагающей еще диференциального исчисления части математики) его основные понятия и формулы, и давала возможность людям типа Беркли вопить об ошибках нового исчисления.

Но тут мы подошли вплотную к посвященной истории обоснования анализа части математических работ Маркса, к которой нам теперь и нужно перейти. В заключение только одно небольшое замечание.

Особенно неопровержимой казалась Беркли его аргументация против бесконечно малых различных порядков. Ибо как уже исчезнувшая величина может снова стать объектом исчезновения? И нужно признать, что, с точки

---

[1]) За эту противоречивость бесконечно малых некоторые марксисты в кавычках готовы даже видеть в них образец истинно диалектического понятия. Между тем диалектический материализм не признает статического, не связанного с движением (борьбою противоположностей и обусловленным ею переходом на новую ступень) противоречия. «Советская власть, — пишет например т. Сталин, — не может долго базироваться на двух противоположных основах, на крупной социалистической промышленности, которая уничтожает капиталистические элементы, и на мелком единоличном крестьянском хозяйстве, которое порождает капиталистические элементы».

Наоборот, «мелкий буржуа обожествляет противоречие, потому что противоречие есть основа его существа» (Маркс), и именно такое статическое безысходное противоречие.

зрения Ньютона и Лейбница, символы $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ представляются еще более мистическими и таинственными, чем $\frac{dy}{dx}$. Не так обстоит дело у Маркса.

«Символы $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc, — пишет Маркс, — показывают лишь родословную «производной» по отношению к первой заданной первоначальной функции x. Они становятся таинственными лишь поскольку их начинают трактовать как исходный пункт движения, а не как простые выражения последовательно произведенных функций x. Действительно, тогда представляется удивительным, что отношение исчезнувших должно пройти снова более высокие степени исчезновения, тогда как нет ничего удивительного в том, что например $3x^2$ так же хорошо может пробежать диференциальный процесс, как и ее родоначальница x^3. Ведь мы можем исходить и из $3x^2$ как первоначальной функции».

VII

Маркс не успел отделать начисто обещанный в конце работы о диференциале исторический очерк. Он не имел повидимому возможности выполнить неоднократно высказываемое им в рукописях намерение просмотреть предварительно в музее «The residual analysis» Джона Ландена. Содержание этой предполагаемой части работы тем не менее известно по сохранившемуся первому черновому ее наброску, который и приведен выше.

В истории обоснования диференциального исчисления Маркс различает две переплетающиеся друг с другом основные линии развития: первую—определяющуюся тем, исходим ли мы непосредственно из диференциального исчисления или наш исходный пункт находится еще в пределах обыкновенной алгебры;

вторую—зависящую от того, как представлено изменение переменной величины.

В «К критике политической экономии» Маркс обращает внимание на то, что в истории науки вопрос обсуждается обычно в его сложной форме раньше, чем разрешен в элементарной. Ибо «историческое развитие всех наук приводит к их действительной исходной точке только через множество перекрещивающихся и обходных путей. В отличие от других строителей, наука не только строит воздушные замки, но возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем заложен его фундамент».

История развития основных идей диференциального исчисления дает еще одно подтверждение этого положения. Ибо творцы этого исчисления—Ньютон и Лейбниц—действовали сразу же, с самого начала на почве диференциального исчисления с уже готовыми оперативными символами последнего, алгебраическое происхождение которых однако еще не было обнаружено. Они могли благодаря этому пользоваться уже с самого начала всеми оперативными преимуществами, доставляемыми употреблением диференциалов, несмотря на то, что, так как диференциалы у них «были введены с самого начала, по определению, как самостоятельные, отделенные от переменных величин, из которых они возникли, существования, а не выведены каким-либо математическим путем»,—применяемые ими операции были мате-

матически неправильны. Д'Аламбер исправил математически неправильные методы Ньютона и Лейбница. Однако исходный пункт у него оставался тот же. Он исходил непосредственно из «символической стороны», как выражается Маркс, а не из некоторого «реального» математического процесса, порождающего новые символы, так же, как это делали и Ньютон и Лейбниц. В самом деле, Ньютон ставил задачу отыскать *флюксию* некоторой переменной величины и решал ее посредством введения *моментов*, существование которых заранее предполагалось наряду с самой переменной величиной. Лейбниц совершенно так же ставил задачу об отыскании отношения *дифференциалов*, заменяющих у него ньютоновские моменты. А Д'Аламбер искал значение отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h=0$, т. е. значение символа $\frac{0}{0}$.

Вместо того, чтобы с необходимостью притти в результате математического вывода к специфическим для дифференциального исчисления символам и, вскрыв таким образом их происхождение и значение, понять их смысл, они непосредственно исходили из самих этих символов и пытались без выяснения их родословной и происхождения ответить на «проклятые вопросы», *что есть* «флюксия», «момент», «бесконечно малое», «дифференциал», «нуль, деленный на нуль», и т. п.

Лишь Лагранж перевернул в этом отношении постановку вопроса и сделал исходным пунктом «алгебру», т. е. некоторый, по выражению Маркса, «реальный процесс» получения производной. Однако он при этом так и не дошел до дифференциального исчисления, введя символику последнего лишь из соображений «однородности обозначений» и «симметрии».

Маркс также исходит из некоторого «реального» «алгебраического» процесса, но не останавливается, подобно Лагранжу, на полпути, а показывает, как он приводит сначала к возникновению новых, дифференциальных, символов, а затем к обращению метода, делающему их самостоятельными исходными пунктами нового исчисления. Таким образом метод Маркса вскрывает тайну всех ему предшествующих.

Более глубокий анализ этих методов, который Маркс проводит в основном на примере степенной функции, вскрывает основную цепь развития, связывающую их от Ньютона и Лейбница до Лагранжа включительно (фактически вплоть до современной математики), и обнаруживает корни их тождественности и различий в вопросе о том, как именно представлено изменение переменной величины.

Когда переменная x изменяется, превращаясь в x_1, то происходящее при этом изменение может быть представлено двояким образом:

а) можно считать, что происшедшее изменение есть простое присоединение к одной постоянной величине другой, столь же постоянной,—ее наращения, существующего заранее, сразу, с самого начала, *наряду* с самой переменной величиной, как «плод рядом со своей матерью до того, как та была беременна»,—и это обычная на протяжении истории дифференциального исчисления точка зрения, общая для всех методов, начиная с Ньютона и Лейбница и кончая Лагранжем;

б) но можно рассматривать процесс изменения как лишь определяющий величину получаемого при этом переменной величиной наращения, как предшествующий ему. Измененное значение переменной величины (x_1) не составляется при этом путем простого механического соединения друг

с другом двух равноправных неизменных величин (x + приращение x). Лишь в результате происшедшего изменения (x в x_1) образуется разность $x_1 - x$, а следовательно и самое «приращение». И это—основа марксова метода, быть может (хотя вероятно и в неосознанной еще форме, как полагает Маркс) и метода Дж. Ландена. «Основное различие твоего и старого метода,—пишет Марксу Энгельс,—состоит в том, что ты даешь x превращаться в x_1, следовательно—действительно изменяться, тогда как другие исходят из $x + h$, что всегда представляет лишь сумму двух величин, но никак не изменение одной величины»[1]). «x_1,—говорит Маркс,—есть само возросшее x, его рост не отделен от него; x_1 есть совершенно неопределенная форма его роста; эта форма отличает возросшее x, именно x_1, от его первоначальной формы до роста, от x, но она не отличает x от самого его приращения. Отношение между x_1 и x может быть поэтому выражено лишь отрицательно, как разность, как $x_1 - x$. Напротив, в $x_1 = x + \Delta x$:

1) разность выражена положительно, как приращение x,

2) его рост выражен поэтому не как разность, а как сумма его самого в первоначальном состоянии + его приращение...».

Для краткости мы будем различать в дальнейшем эти две основные точки зрения как точки зрения суммы и разности. Первая представляет измененное x (x_1) в различных формах:

1) $x_1 = x + \tau x$ — Ньютон; x — скорость изменения переменной x (флюксия), τ—бесконечно малый промежуток времени, в течение которого эта скорость длится, τx — момент, или полученное величиной x приращение.

2) $x + dx$ - Лейбниц; dx—дифференциал, или бесконечно малое приращение x.

3) $x + \Delta x^2$),—Д'Аламбер; Δx—конечная разность x.

4) $x + h$[3])—Лагранж.

Однако всем им обще лежащее в основе их представление об изменении как простой совокупности двух неизменных состояний.

Вторая представляет изменение x в виде неопределенной разности: $x_1 - x$. (Именно неопределенной разности, ибо уже простое полагание этой разности равной чему-то третьему, равной Δx например, приводит нас к выражению: $x_1 - x = \Delta x$, а следовательно и $x_1 = x + \Delta x$.)

Если мы теперь посмотрим на историю обоснования диференциального исчисления, то различим в ней следующие основные моменты: 1) мистическое диференциальное исчисление Ньютона и Лейбница, 2) рациональное диференциальное исчисление д'Аламбера (и Эйлера[4]) и 3) чисто алгебраическое Лагранжа.

---

[1]) Письмо от 21 ноября 1882 г., написанное по поводу математического исследования Мура, пришедшего к выводу, что «алгебраический метод Маркса не что иное, как замаскированный диференциальный». «Сэм, как ты сразу заметил,—отвечает на это Маркс (22 ноября 1882 г.),—критикует примененный мною алгебраический метод таким образом, что спокойно отбрасывает его, и вместо этого останавливается на геометрическом применении, о котором я не сказал ни слова»

[2]) Отрицательная форма. Приращение рассматривается как разность.

[3]) Положительная форма. Сам Лагранж писал даже не h, а i (от слова «incrément»).

[4]) См. письмо Маркса Энгельсу от 22 ноября 1882 г.

Остановимся вкратце на каждом из них.

Мистическое диференциальное исчисление. Пусть имеем функцию $y=x^3$, и x получает приращение τx (Ньютон) или dx (Лейбниц). Так как по существу никакой разницы между Ньютоном и Лейбницем при этом нет, ограничимся здесь методом Лейбница. Как уже было отмечено, dx рассматривается непосредственно, с самого начала как диференциал. Итак x превратилось в $x+dx$, а следовательно y, равный третьей степени x,—в $(x+dx)^3$. Применяя бином Ньютона, мы имеем:

$$(x+dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3 \quad (1)$$

$$(x+dx)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3, \quad (2)$$

и производная, $3x^2$, фигурирует уже в совершенно готовом виде в качестве коэфициента при dx во втором члене разложения (1). Вся дальнейшая процедура сводится поэтому не к развитию (Entwicklung) этой окончательной производной из «предварительной», а к ее высвобождению (Loswicklung) от множителя dx и свиты остальных членов, высвобождению, которое в методах Ньютона и Лейбница, начинающих непосредственно с диференциалов, покоится на некоторой математически неправильной операции. Именно, если первоначальная функция $y=x^3$, то, обратившись к правой стороне равенства (1), мы непосредственно замечаем, что полученное в результате изменения x приращение dy есть: $3x^2dx+3xdx^2+dx^3$, отбрасывая в котором, по соображениям их относительной малости по сравнению с $3x^2dx$, члены $3xdx^2$ и dx^3, получаем:

$$dy = 3x^2dx,$$

и наконец

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2.$$

Самое отбрасывание однако математически неправильно. Ибо либо отбрасываемые члены нули, но тогда dx само есть тоже нуль и равенство (2) сводится к выражению:

$$(x+0)^3 - x^3 = 3x^2\,0 + 3x\,0^2 + 0^3$$

или

$$0 = 0;$$

либо же они не нули, но тогда отбрасывание их есть незаконная операция, и во всяком случае представляется чудом, что результат получается совершенно точный. Они таким образом не могут быть ни нулями, ни не нулями, и Ньютону и Лейбницу не остается ничего другого, кроме как приписать своим «моментам» и «диференциалам» особое существование как отличным от остальных математических величин таинственным, мистическим сущностям.

Рациональное диференциальное исчисление. Д'Аламбер исходит из того же способа представления изменения переменной величины, но он исправляет математически неправильные методы Ньютона и Лейбница и таким образом рационализирует все исчисление. Он дает сначала x не бесконечно малое и не равное нулю, а конечное приращение Δx, благодаря чему (в нашем примере, где $y=x^3$) y превращается в

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

и совершенно так же, как в методах Ньютона и Лейбница, производная дана уже в совершенно готовом виде ($3x^2$) во втором члене

разложения. Однако, чтобы «высвободить» ее из контекста, в котором она при этом находится, Д'Аламбер предпринимает уже ряд математически вполне правильных операций. Он освобождается от первого члена разложения: x^3, вычитая его от обеих сторон равенства (3), благодаря чему (так как $x^3 = y$) мы получаем сначала

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Разделивши потом обе стороны этого равенства на Δx, что он имеет право сделать, так как Δx не равно 0, он получает

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2. \qquad (5)$$

И лишь теперь он полагает $\Delta x = 0$, благодаря чему левая сторона обращается в $\frac{0}{0}$ или $\frac{dy}{dx}$, правая же дает нам в качестве значения этого символа производную $3x^2$.

Несмотря на то, что этот метод есть по существу лишь исправление математически неправильных методов Ньютона и Лейбница, он представляет собой все же колоссальный шаг вперед по сравнению с ними. Ибо в нем уже появляется подлинный момент развития, хотя пока на одной только левой символической стороне (реальный процесс получения производной попрежнему сводится не к дифференцированию, т. е. полаганию и снятию разностей, а к простому применению бинома Ньютона и «высвобождению» доставляемой им в готовом виде производной). Именно окончательное символическое выражение производной, символический диференциальный коэфициент $\frac{dy}{dx}$, не предполагается при этом заранее данным наряду с самими переменными величинами и их конечными приращениями, а выводится путем диалектического процесса полагания конечных разностей x и Δy и их снятия в дальнейшем, которое и приводит нас от отношения конечных разностей $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ к диференциальному коэфициенту $\frac{dy}{dx}$.

Чисто алгебраическое диференциальное исчисление. Тайну методов Ньютона, Лейбница и Д'Аламбера вскрывает Лагранж, исходный пункт которого, подход к изменению переменной величины, остается еще однако тот же. Но он переносит центр тяжести с символической на реальную сторону и объясняет, почему применение бинома Ньютона в этих методах решало задачу нахождения диференциального коэфициента. Именно оно представляет собой по существу разложение в ряд Тэйлора, а последнее дает уже во втором члене в виде коэфициента при первой степени приращения h первую новую, произведенную разложением, функцию $f'(x)$, «производную» от $f(x)$. Почему Лагранж и предлагает освободиться от балласта прочих членов и излишней роскоши дальнейших операций тем, что определяет производную как коэфициент при h в первой степени в разложении функции в строку Тэйлора.

Марксов метод диференцирования. В отличие от всех этих методов, покоящихся на точке зрения суммы, применяемый Марксом метод основан действительно на диференцировании (как полагании и снятии разностей). В нем развитие происходит не только на левой символической стороне, как в методе Д'Аламбера, но и на правой,

реальной. Больше того, положительное развитие происходит именно на правой стороне, левая лишь отражает его в отрицательной форме. В самом деле, в этом методе при изменении x в x_1 $y(=x^3)$ изменяется в y_1, и мы получаем:

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1^3-x^3}{x_1-x}=\frac{(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)}{x_1-x}=x_1^2+x_1x+x^2.$$

«Предварительная производная»: $x_1^2+x_1x+x^2$ нигде не содержит в себе в готовом виде окончательной: $3x^2$.

Последняя лишь развивается из нее в результате положительного приравнивания $x_1=x$, в то время как на левой стороне отрицательная форма этого приравнивания: $x_1-x=0$, приводит нас к диференциальному коэфициенту: $\frac{dy}{dx}$. «Разложение разности между функцией, выраженной в x_1, и функцией, выраженной в x, на члены, каждый из которых имеет x_1-x множителем, может, смотря по свойствам первоначальной функции, потребовать больших или меньших «алгебраических» маневров, стало быть не всегда выполняется так легко, как в случае $x_1^3-x^3$. Но это ничего не меняет в «методе».

Чтобы покончить с историческим очерком, нам остается сделать еще два замечания:

1) Для Маркса существенно не то, пишем ли мы x_1-x, а не Δx, т. е. не голая форма сама по себе, а то, как именно представлено изменение переменной величины по существу, т. е. то содержание, которое в этой форме выражается. Так, в выводе Д'Аламбера можно заменить $x_1-x+\Delta x$ через $x_1=x+(x_1-x)$, абсолютно ничего не меняя этим в методе. Ибо наращенное значение x будет при этом попрежнему представлено как сумма его первоначального значения + приращение. В заметке, посвященной сравнению своего метода диференцирования с методом Д'Аламбера на примере диференцирования сложной функции, Маркс замечает по этому поводу:

«Если в д'аламберовском выводе x_1-x-h заменить обратно через $h=x_1-x$ [1]), то этим абсолютно ничего не изменится в самом методе» [2]).

2) Какие были у Маркса основания подозревать тождественность своего метода с методом Дж. Ландена? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно привести характеристику этого метода, даваемую Лакруа, большой «Трактат» которого, по свидетельству самого Маркса, был в его распоряжении.

Вот это место из Лакруа:

«Ланден, соотечественник Ньютона, первый повидимому поставил себе задачу свести диференциальное исчисление к чисто алгебраическим понятиям. Его сочинение, посвященное «Анализу вычетов» (The residual analysis), опубликованное около 1760 г., изображает это исчисление как имеющее основным предметом нахождение развернутого выражения (разложения, développement), для разности двух подобных друг другу

---

[1]) То есть вместо того, чтобы вместе с Д'Аламбером заменять разность x_1-x через h, теперь, наоборот, вместо h подставить всюду x_1-x.

[2]) Заметка оканчивается следующим замечанием, которое ввиду того, что самая заметка еще не публикуется, приводим полностью, как кратко и при этом ярко характеризующее метод Маркса в сравнении с методом Лагранжа:

функций от количеств x и x_1, разделенной на разность этих количеств, т. е. разложение (developpement) выражения

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x},$$

и когда это частное (quotient) получено так, что не осталось уже никакого следа делителя x_1-x, в нем полагают $x_1=x$, так что последней целью исчисления является достижение частного значения (special value) вышеуказанного отношения»[1]).

Чтобы окончить обзор основных рукописей Маркса, посвященных дифференциальному исчислению, нам осталось только охарактеризовать вкратце позднейшую повидимому работу, озаглавленную Марксом: «Теорема Тэйлора». Вернее, не работу даже, а отдельные ее наброски. Ибо вся рукопись состоит из содержащего несколько страниц начала, за которым следуют многочисленные дополнения «ad p. 1, Taylor's Theorem», различные варианты начала, вводная часть, дополнения к отдельным местам (страницы этих дополнений занумерованы уже не цифрами, а буквами),— словом, структура рукописи настолько сложна, что трудно даже выделить основную мысль Маркса. Насколько нам кажется, Маркс ставит себе в этой работе задачу показать, что при доказательстве теоремы Тэйлора действительно возникает необходимость перехода от точки зрения неопределенной разности к точке зрения суммы[2]), и выяснить как алгебраические корни этой теоремы в биноме Ньютона, так и тот скачок «из обыкновенной алгебры и притом посредством обыкновенной алгебры в алгебру переменных» и от конечных многочленов к бесконечным рядам, который с этим переходом связан и на который он обратил внимание, хотя и не в столь развернутой форме, уже в ранних работах.

В работе интересны места, где Маркс дает еще раз характеристику своего «алгебрического» метода диференцирования и (исторического характера) замечание о роли Лагранжа, которые и приводим (в выдержках).

«С точки зрения примененного нами алгебраического метода,—пишет Маркс,—пока мы действуем характеризующим его образом, эта теорема (речь идет о теореме Тэйлора.—*С. Я.*) не применима», и он характери-

---

«Если даже эта трактовка x_1 (или возросшего x), при которой его приращение, например $x_1-x=h$, не вводится как самостоятельная, наряду с ним существующая величина, и была уже известна, что весьма вероятно и в чем я убеждусь по прочтении в Музее Дж. Ланд:на, то все же её существенное отличие не могло быть понято.

Отличие же этого метода от [метода] Лагранжа состоит в том, что в нем действительно диференцируют и поэтому на символической стороне возникают дифференциальные выражения. Между тем у Лагранжа вывод не выражает алгебраически диференцирования, а состоит в алгебраическом выводе функций из бинома непосредственно, и их диференциальная форма принимается лишь ради «симметрии», ибо из диференциального исчисления известно, что первая производная функция $=\frac{dy}{dx}$, вторая $=\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

[1]) «Traite du calcul differentiel», 1810, p. 239—240.

[2]) Ясно, что если величина x изменяется в x_1, то в результате изменения образуется разность x_1-x, и разность эта имеет определенную величину h, т. е. $x_1-x=h$, откуда следует, что $x_1=x+h$. При изучении изменения переменной величины нельзя только исходить из этого выражения, ибо это означает подмену изменения, движения, его результатом.

зует в дальнейшем свой метод как такой, в котором h не может означать наращения x, ибо «$x_1 - x$ существует для нас лишь в этой форме разности, а не как некоторое $x_1 - x = h$, и поэтому сумма $x_1 = x + h$». В алгебраическом методе дифференцирования «разность независимой переменной $x_1 - x$ (как соответственно и зависимой переменной $y_1 - y$ или $f(x_1) - f(x)$) остается всегда в этой ее первоначальной форме, так что $x_1 - x$, как и $y_1 - y$, никогда не может быть положено равным некоторому значению разности — Δx или h, следовательно также никогда не может стать,— как в случае $x_1 - x = \Delta x$ или h, — ни $x_1 = x + \Delta x$ или $x + h$, ни $y_1 - y = \Delta y$ или k. Когда мы однако записываем эквивалент предварительной производной $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то это для нас лишь знаки для неопределенных $x_1 - x$ и $y_1 - y$, а не значения разностей. В самом выводе из $f(x)$ возросшее x фигурирует всегда как x_1, с другой стороны, возросшее y как y_1, и поэтому они не могут фигурировать одновременно как $x + \Delta x$, $y + \Delta y$».

Обсуждая вопрос о неудовлетворительности обычных доказательств теоремы Тэйлора, Маркс замечает, что если, несмотря на невыясненность корней теоремы Тэйлора и недоказанность предпосылок, на которых она покоится, «теорема Тэйлора... действительно оказалась на практике самой всеобъемлющей, общей и богатой приложениями оперативной формулой всего исчисления, то это есть лишь увенчание здания ньютоновской школы, к которой принадлежал Тэйлор, и вообще ньютоно-лейбницевского периода развития дифференциального исчисления, когда уже на первых шагах правильные результаты выводились из неправильных предпосылок.

«Алгебраическое доказательство теоремы Тэйлора дано Лагранжем и вообще образует базис его алгебраического метода дифференциального исчисления. В самую суть дела мы подробно войдем в предполагаемой исторической части этого манускрипта [1]).

«Здесь (als cursus historiae) заметим лишь, что Лагранж ни в коей мере не возвращается к неосознанной основе Тэйлора—биномиальной теореме, и притом в ее самой элементарной форме: для двух величин $x + a$, или в данном случае $x + h$, и целой положительной степени. Еще менее того он углубляется дальше и задается вопросом, почему биномиальная теорема Ньютона, переведенная в дифференциальную форму и одновременно насильственно освобожденная от ее алгебраических условий, выступает как самая всеобъемлющая и общая оперативная формула основанного Ньютоном исчисления. Ответ прост: потому, что Ньютон с самого начала полагает $x_1 - x = dx$, $x_1 - x + dx$. Развитие разности превращается таким образом сразу уже в развитие суммы, в развитие бинома $x + dx$ [2]) (причем мы совершенно отвлекаемся от того, что он должен был

---

[1]) Этого намерения Марксу повидимому не удалось осуществить.

[2]) Подобно тому как Ньютон и Лейбниц сразу, с самого начала действовали на почве дифференциального исчисления с готовыми символами последнего и получали благодаря этому (хотя и неправильным путем) его оперативные формулы, они сразу, с самого начала стояли уже на точке зрения суммы, т. е. готового результата изменения, и дали таким образом своим преемникам возможность получить такую формулу дифференциального исчисления, которая отображает уже не самый процесс изменения, а его результат.

бы положить $x_1 - x - \Delta x$ или h и следовательно $x_1 = x + \Delta x$ или $x + h$). Тэйлор лишь развивает это основание системы до его самой общей и всеобъемлющей формы, что вообще стало возможным лишь тогда, когда были открыты все основные операции диференциального исчисления,—ибо какой смысл имели бы его $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ etc., если бы не были в состоянии вывести для всех существенных функций x соответствующие им $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

«Наоборот, Лагранж примыкает непосредственно к теореме Тэйлора, конечно на такой ступени, когда, с одной стороны, преемники ньютоно-лейбницевской эпохи доставили ему уже исправленное издание прежнего $x_1 - x = dx$, именно $x_1 - x - \Delta x$, стало быть также и $y_1 - y - f(x+h) - f(x)$, а, с другой стороны, именно через алгебраизирование формулы Тэйлора он построил свою теорию производных функций. Так примыкали Фихте к Канту, Шеллинг к Фихте, Гегель к Шеллингу без того, чтобы Фихте, Шеллинг, Гегель исследовали общую основу Канта, т. е. идеализм вообще; иначе они не могли бы развивать его дальше».

VIII

Энгельс недаром хотел издать математические рукописи Маркса вместе со своими работами по диалектике природы. Обе работы действительно дополняют друг друга. И можно смело сказать, что публикуемые Институтом Маркса—Энгельса—Ленина математические работы Маркса будут иметь для наших математиков-марксистов не меньшее значение, чем «Диалектика природы» для всего естественно-научного фронта вообще.

Не только для математиков однако. Математические рукописи Маркса демонстрируют еще на одном примере метод Маркса—материалистическую диалектику—в действии. Они должны поэтому подвергнуться основательному изучению со стороны философов. Тов. Сталин недаром обратил внимание наших философов-партийцев на необходимость изучения марксистско-ленинской философии в действии, в ее конкретном применении в практике строительства социализма, классовой борьбы, конкретного знания математики конечно в том числе.

Вряд ли возможно в первой статье оценить полностью все значение этих работ Маркса. Остановимся поэтому лишь на отдельных моментах:

1. Математическая база Маркса была ограничена, как мы уже видели, характером материала, над которым он работал. Математика с тех пор сделала колоссальный шаг вперед не только в смысле создания новых дисциплин и методов, решения новых задач, вообще роста вверх и вширь, но и в смысле выяснения основных понятий—таких, как понятия числа, функции, операции, непрерывности, предела и т. п. Современные определения производной и диференциала математически уже вполне строги. И тем не менее даже «солидный» современный курс анализа вводит эти понятия в математику лишь чисто формальным, внешним образом на основе определения, выступающего как некоторое произвольное соглаше-

ние. Еще в большей мере это относится и к специфической для дифференциального исчисления символике. В чем именно необходимость, смысл и значение последней — на этот вопрос даже не пытаются ответить. Точно так же невыясненным остается обычно переход от «арифметики» дифференциального исчисления—задачи нахождения производных для основных элементарных функций—к его «алгебре», т. е. к оперирующему уже на собственной почве дифференциальному исчислению, равно как и значение основных формул последнего как уже не просто количественных тождеств, а «оперативных формул». Наконец совершенно так же, как это имело место в истории обоснования анализа, начиная с Ньютона и Лейбница, кончая Лагранжем, современные математики исходят непосредственно из точки зрения суммы, т. е. заменяют движение, изменение переменной величины совокупностью неизменных состояний.

Маркс же исходит действительно из изменения переменной величины и показывает, что введение ее в элементарную математику делает тотчас же необходимым переход к высшей. Этот переход Маркс и прослеживает во всех его деталях. Неразрешимая для идеалистической философии математики задача обосновать необходимость основных определений и соответствующей символики анализа, выяснить подлинный смысл перехода к новому, дифференциальному исчислению оказывается таким образом решенной.

Более того, так же, как это было в эпоху Беркли, как это всегда имеет место в истории науки, пока с нее не сорван «покров тайны»,— темные складки этого покрова образуют питательную почву для паразитирующего на науке идеализма, облегчают ему задачу односторонне выхватить «одну из черточек, сторон, граней познания» и превратить ее «в абсолют, оторванный от материи, от природы, обожествленный» (Ленин).

Невыясненность вопроса о необходимости именно таких, а не иных определений основных понятий математики создает возможность трактовать их как условные, формальные, произвольные, т. е. питает махистские, конвенционалистические установки; подмена движения, изменения его результатом обусловливает метафизические черты современного теоретико-множественного обоснования анализа и использовывается логистикой Рёсселя, трактующей движение как совокупность неизменных состояний. Неудовлетворительность, метафизичность современного обоснования анализа дает возможность такому уже до конца последовательно субъективно-идеалистическому направлению, как интуиционизм Броуэра и Вейля, провозгласить принципиальную невозможность математического обоснования основных понятий анализа. «Откровенно рассуждал, простовато рассуждал епископ Беркли! В наше время те же мысли... облекают в гораздо более хитрую и запутанную «новой» терминологией форму» (Ленин), но мысли-то остаются те же. В данном случае это мысли о том, что основные понятия и методы анализа нельзя обосновать математически, что и такая точная наука, как математика, покоится на моментах веры, которые должны быть привнесены в нее «из философии», и что таким философским принципом, призванным заменить рациональную связь основных понятий и положений математики, должен быть принцип «трансцендентального идеализма».

Целый ряд основных понятий и вопросов, вокруг которых идет теперь философская борьба и размежевка по основным направлениям, отличается от тех проблем, которые занимали математиков XVIII и первой половины XIX столетия и которые не могли поэтому не привлечь к себе внимания Маркса. Но основная проблема, основной вопрос остались те же, это—борьба идеализма и материализма.

Математические работы Маркса, вскрывая диалектику развития основных понятий дифференциального исчисления, срывая таким образом «покров тайны» с этой важнейшей части современного анализа, выбивают почву из-под ног математического идеализма в вопросе об обосновании дифференциального исчисления, дают нам образец применения материалистической диалектики к этой области знания и тем самым отправной пункт борьбы с математическим идеализмом и на более широкой базе современной математики.

То обстоятельство, что эти рукописи ограничиваются определенным кругом математических вопросов, не суживает их значения. Возражая Богданову, который соглашался «признать за теорией денежного обращения Маркса объективную истинность только «для нашего времени», называя «догматизмом» приписывание этой теории «надисторически-объективной» истинности», Ленин писал: «Единственный вывод из того, разделяемого марксистами, мнения, что теория Маркса есть объективная истина, состоит в следующем: идя по пути марксовой теории, мы будем приближаться к объективной истине все больше и больше (никогда не исчерпывая ее); идя же по всякому другому пути, мы не можем притти ни к чему, кроме путаницы и лжи».

2. Одной из важнейших задач материалистической диалектики является задача марксистской разработки истории науки. «Продолжение дела Гегеля и Маркса,—пишет Ленин,—должно состоять в диалектической обработке истории человеческой мысли, науки и техники».

Математические рукописи Маркса впервые дают нам цельную, законченную и систематическую картину диалектики исторического хода развития некоторой, столь отличной от обществознания, дисциплины, какой является дифференциальное исчисление. Подобного по глубине, по умению обнаружить корни различия и тождества различных исторически имевших место подходов к основным понятиям науки еще не существовало в истории математики и естествознания. Математические работы Маркса должны поэтому служить для наших математиков и естественников-марксистов образцом той работы над историей науки, о которой пишет Ленин.

3. Огромную роль в математике играет проблема преобразования одной математической формы в другую. Всякое математическое равенство имеет конечно смысл лишь, поскольку одна его сторона отлична от другой. Однако роль этого различия формы в математике еще отнюдь нельзя считать достаточно выясненной, особенно поскольку речь идет о связи между «простым» различием формы, в которой выражено некоторое математическое состояние, и соответствующим различием математических концепций по существу. Этот вопрос впервые выдвинут на принадлежащее ему место математическими рукописями Маркса.

Так, если некоторая величина x изменяется, превращаясь в x_1, то образуется разность $x_1 - x$, и эта разность неизбежно равна какой-

нибудь третьей величине h. Однако, если мы начнем изучение изменения переменной величины именно с этой формы, в которой наряду с изменяющимися величинами с самого начала существует уже их разность в виде некоторой, заранее готовой, третьей величины, мы придем к другой концепции дифференциального исчисления, чем в случае, если останемся первоначально при неопределенной разности.

Так символ $\frac{dy}{dx}$ только по форме отличается у Маркса от символа $\frac{0}{0}$. Однако это различие формы настолько существенно, что без перехода от символа $\frac{0}{0}$ к символу $\frac{dy}{dx}$ нет дифференциального исчисления. Вопрос о причинах этого обстоятельства приводит нас к последнему моменту, на котором мы считаем необходимым остановиться в этой связи.

4. Крупнейшие математики неоднократно обращали внимание на роль символики в математике, особенно в новейшей. Такой математик, как Клейн, говорил даже по этому поводу, что карандаш бывает умнее самого математика, подразумевая этим, что достаточно математику облечь свои мысли в определенную символическую форму, чтобы получить возможность действовать. Именно так например поступали математики до конца XVIII и даже начала XIX столетия, обращаясь с выражением $\frac{dy}{dx}$, как с обыкновенной дробью, или с $\sqrt{-1}$ как с обыкновенным (вещественным) числом. Пуанкаре тоже обращал внимание на то, что удачно подобранная символика часто определяет успех метода. Однако все объяснения этой таинственной роли символа в математике, понимавшегося при этом совершенно по Гельмгольцу, т. е. как лишенный смысла знак, не отражающий, а лишь замещающий некоторую вещь (или процесс), ограничивались ссылками на пресловутую «экономию мышления». Вопрос о том, почему одни символы обладают способностью «экономизировать мышление», а другие — нет, вообще не ставился. За словами об «экономии мышления» скрывалась таким образом не только фактическая неспособность дать ответ на вопрос, но и желание смазать его, затушевать его значение, не поставить прямо вопроса об отношении мышления к бытию и фактически открыть таким образом двери идеализму, хотя бы через таинственную, мистическую интуицию, управляющую при этом творчеством математика.

Материалистическое объяснение этой роли символа в математике впервые дано только математическими рукописями Маркса. Эта роль объясняется тем, что символ играет в математике отнюдь не роль гельмгольцевского «знака» или плехановского «иероглифа». Он является отражением некоторого реального процесса и хорош только тогда, когда правильно, адэкватно его отображает. Он сам поэтому может в свою очередь стать предметом изучения и объектом исчисления, лишь если этому первому требованию удовлетворяет. С символом $\frac{0}{0}$ нельзя поэтому построить никакого дифференциального исчисления, с символом $\frac{dy}{dx}$ — можно. Марксистско-ленинская теория отражения получает таким образом еще одно блестящее свое подтверждение.

Маркс не был математиком-специалистом, но он основательно изучал математику и был вооружен методом материалистической диалектики, открывавшим перед ним такие перспективы в математике, которых не могли заметить и математики-специалисты. Через 50 лет после смерти Маркса его математические рукописи могут служить образцом применения материалистической диалектики и стимулом для дальнейшей работы на новом, более широком современном основании.

Перевод рукописей представил довольно значительные трудности. Раньше всего оказалось очень трудно передать язык Маркса, насыщенный образами и сравнениями, игрой слов, новыми словообразованиями и словоупотреблениями, переплетением трех основных европейских языков. Тут и «выступающая предводителем других членов» производная, и «обремененный множителем» коэфициент, и «беременная» приращением переменная величина, и совершающий «нисхождение в ад через нуль» дифференциал, и «дифференциальный коэфициент, как тень без тела, которое отбрасывает ее», появляющийся внутри некоторой «оперативной формулы», и самая эта «оперативная формула, как стратагема действия», и такое слово, как «wegescamotieren» (найдите в словаре!), и такая игра слов, как «Entwicklung» (развитие) и «Loswicklung» («высвобождение»—нас), и такие фразы, которые состоят из трех слов, из которых одно—немецкое, другое—английское, а третье—французское.

Особенные трудности представляло при переводе слово «Entwicklung», которое означает и развитие, и развертывание, и изложение, и которое применяется по-немецки и для обозначения разложения функции в ряд, выступающего у Маркса именно как разворачивание, между тем как русское слово «разложение» этого смысла не передает. Трудно было передать также устанавливаемое Марксом различие между терминами «das Differential» и «die Differentielle», под вторым из которых Маркс понимает просто «снятую» конечную разность, между тем как первый означает формулу $dy=f'(x)dx$ в целом, т. е. дифференциал в обычном и для современной математики смысле слова. Мы переводим поэтому первый как «дифференциал», второй же (не совсем удачно) как «дифференциальную частицу».

Особенно труден был перевод тех работ Маркса, которые, как исторический очерк например, имеются лишь в черновом наброске. Записывая мысли в момент их зарождения, Маркс, естественно, не думал еще о форме. В таких работах попадаются поэтому и фразы без подлежащего или сказуемого и длиннейшие периоды, в которых очень трудно выделить главное предложение. Кроме того нужно иметь в виду, что, как мы знаем из переписки, Маркс имел возможность заниматься математикой либо в порядке отдыха от основной работы, либо же когда был болен и не мог заниматься работой над «Капиталом». Оба последние обстоятельства обусловили ряд ошибок в рукописях, начиная от нумерации страниц[1]) и простых описок и кончая ошибками иногда и более серьезного характера.

[1]) Маркс пишет «4» и «7» очень похоже друг на друга, то же в отношении цифр и «8». Поэтому у него нередка нумерация страниц вроде такой: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 6, 7, 5, 6, что очень затрудняло восстановление целых рукописей фотокопиям отдельных страниц.

Участники бригады ИМЭЛ по математическим рукописям Маркса считали однако своей обязанностью дать максимально близкий к оригиналу перевод, заботясь раньше всего о точности передачи, а затем уже о стиле и требованиях русского языка. Случайные ошибки в вычислениях мы просто исправляли, более существенные описки оговаривали в примечаниях.

Следует еще отметить, что индекс, отличающий наращенную величину от первоначальной (x_1 например от x), мы ставим внизу у буквы, обозначающей эту величину, между тем как Маркс помещает его (вслед за учебниками того времени) вверху (x^1). Мы поместили его внизу, чтобы избежать смешения его с показателем степени или обозначением производной. В соответствии с принятыми теперь обозначениями мы пишем $f(x)$ вместо марксовского fx. Особую роль у Маркса играет часто встречающееся внутри математической формулы слово «или». Дело в том, что Маркс строго различает левую и правую сторону равенства, помещая например на левой стороне символическое выражение, а на правой его реальный эквивалент, или на левой функцию от x, а на правой функцию в x. Когда он делает какое-нибудь математическое преобразование, еще не переводящее нас с одной стороны равенства на другую, он пишет поэтому вместо знака равенства слово «или». Так например выражение

$$\frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ или } \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x^2 + x_1 x + x_1^2 \text{ или } f^1(x_1, x)$$

имеет явно выделенные две стороны («символическую» и «реальную»), несмотря на то, что каждая из них дана в нескольких выражениях.

Перевод первой и третьей части выполнен т. Райковым, второй части — т. Нахимовской. Редакция перевода Райковым и Яновской совместно. В работе по восстановлению оригиналов из разрозненных частей и страниц, расшифровке исторического очерка и первого наброска работы о диференциале, а также сверке расшифровок с фотокопиями участвовали все члены бригады. Подробная опись рукописей, использованная в настоящей статье, составлена т. Нахимовской, ею же проделана в основном работа по установлению порядка следования рукописей Маркса и сличению конспектов с учебниками, использованными Марксом.

ЭНГЕЛЬС О ПРОИСХОЖДЕНИИ И ФАКТОРАХ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ[1]

В. МОЛОДШИЙ

В «Людвиге Фейербахе» Энгельс подчеркивал, что «великим, основным вопросом всякой, а особенно новейшей философии является вопрос об отношении мышления к бытию». С давних пор сообразно ответам на этот вопрос философы разделились на два больших враждующих лагеря. Те, которые природу считали основным началом, составили материалистический лагерь. Наоборот, те, которые считали, что дух (разум, «я», бог и т. п.) предшествовал природе, составили идеалистический лагерь. С давних пор в самых разнообразных формах эти два лагеря философов вели непримиримую борьбу. Ведут и сейчас—все силы буржуазной реакции под самыми разнообразными идеалистическими знаменами (вплоть до явного мистицизма и поповщины), борются против мировоззрения победоносно строящего социализм пролетариата—против марксизма-ленинизма.

Перед каждым, желающим отдать себе отчет об основных вопросах методологии математики, встает именно этот основной вопрос философии[2]. Только ответив на вопрос о происхождении математи-

[1]) Написана по заданию секции методики математики Московского Научно-Исследовательского Программно-Методического Института.

[2]) Всякая методология математики состоит из двух органически связанных учений. Первое анализирует вопросы отношения математики к действительности: происхождение и развитие математических понятий, предмет математики, место математики в системе наук, критерий истины в математике — вот основные проб-

ческих понятий, он сможет подойти к ответу на основные вопросы методологии математики, так как совершенно различно будет представление об этих вопросах, коль скоро он будет считать математические понятия или отражением сторон материальной действительности или продуктом свободного, имманентного творчества мышления.

В работе с Марксом Энгельс и по вопросу о происхождении математических понятий, а значит и по всем основным вопросам методологии математики занял диалектико-материалистическую позицию, начав в первую очередь непримиримую борьбу против идеалистического понимания происхождения математических понятий и предмета математики.

«Персонально» Энгельс вел борьбу с Дюрингом.

Дюринг в понимании происхождения математических понятий и предмета математики стоял на идеалистической позиции. Он считал, что математику можно «вывести априорно, т. е. прямо из головы, не прибегая к опыту из внешнего мира». «В чистой математике,—писал Дюринг,—рассудок занимается своими собственными творениями и фантазиями», понятия числа и фигуры составляют достаточный для нее и создаваемый ею самой объект, и таким образом она имеет «значимость, не зависящую от частного опыта и реального содержания мира».

Таким образом взгляды Дюринга на происхождение математических понятий и предмет математики сводились к двум характерным для идеалиста утверждениям:

1. Математические понятия порождаются нашим мышлением, но в актах этого порождения ни природа, ни наша практическая деятельность никакой роли не играют.

2. Предмет математики есть продукт свободный (в указанном смысле) деятельности мышления.

Посмотрим, как отвечал Энгельс на вопрос о происхождении начальных математических понятий.

«Что чистая математика имеет значимость,—отвечал Энгельс Дюрингу,—не зависящую от специального опыта каждой отдельной личности, это конечно верно и применимо ко всем прочно установленным фактам всех наук, да и вообще ко всем фактам. Магнитные полюсы, состав воды из водорода и кислорода, тот факт, что Гегель мертв, а господин Дюринг жив, имеют значимость независимо от моего опыта или опыта других отдельных людей, даже независимо от опыта господина Дюринга, когда он спит сном праведника. Но отсюда вовсе не следует, что рассудок в чистой математике имеет дело только со своими «собственными творениями и фантазиями». Понятия числа и фигуры заимствованы именно из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первое арифметическое действие, представляют что угодно, но только не свободное творение рассудка. Для счета необходимы

лемы этого отдела методологии математики. Ко второму учению относятся проблемы обоснования математики: как обосновать понятие числа, понятие бесконечности, данную математическую дисциплину, каковы методы математики и т. д., таковы вопросы обоснования математики. Всякая методология математики существенно зависит от уровня современных ей философии и математики. Тем самым, обратно, методология математики (в особенности ее господствующая форма) предопределяет логическую конструкцию математических дисциплин и отчасти ее развитие.

не только объекты счета, но также уже и способность при рассмотрении этих объектов отвлекаться от всех их свойств, кроме их числа, и эта способность—продукт долгого исторического эмпирического развития. Понятие фигуры, как и понятие числа, заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло вовсе в голове из чистого мышления. Раньше, чем люди могли притти к понятию фигуры, должны были существовать вещи, которые имели форму и формы которых сравнивали. Чистая математика имеет своим предметом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, т. е. весьма реальное содержание. Тот факт, что это содержание проявляется в крайне абстрактной форме, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира... Как и прочие науки, математика возникла из потребностей человека: из измерений земли в вместимости сосудов, из исчисления времени и механики»[1]).

Даже многие буржуазные математики и историки математики были вынуждены признать, что понятия числа и фигуры не суть следствия деятельности чистого мышления, а являются продуктом долгого процесса абстрагирования от реальных вещей, связанного с практической деятельностью людей. Укажем хотя бы на имена таких историков, как Цейтен, Т. Гис, отчасти М. Кантор и др. Из имеющейся на русском языке литературы по истории математики можно указать на Фаццари, Кеджори, Тропфке и Ващенко-Захарченко.

Итак «понятие фигуры, как и понятие числа, заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло в голове из чистого мышления».

Можно ли остановиться на этом выводе? Исчерпывает ли этот вывод все то, что сказал Энгельс о происхождении математических понятий, и значит исчерпывает ли он контрответ Энгельса на первое утверждение Дюринга? Конечно нет!

Энгельс говорит, что понятия числа и фигуры заимствованы из действительного мира, т. е. он отвечает на вопрос о происхождении начальных математических понятий. Сказанное им верно. Но понятия числа и фигуры слишком элементарны, чтобы не увидеть их опытного, связанного с практической деятельностью людей происхождения. Недаром Энгельс говорит об эмпирическом зарождении математики. А таково ли происхождение современной нам математики? Ведь не случайно ряд историков математики признает эмпирическое происхождение понятий числа и пространственной фигуры, считая однако позднейшее развитие математики продуктом свободного творчества мышления.

Этот вывод—частичка развитого Энгельсом цельного, марксистского учения о происхождении математических понятий. Являясь составным моментом материалистического понимания истории, это учение дает полный контрответ на первое утверждение Дюринга.

Действительно, по преимуществу в завуалированной форме, ряд буржуазных историков математики делят историю математики на два периода: первый период—донаучной математики они характеризуют как такой начальный этап в развитии математики, в котором математические понятия были заимствованы из действительности. В этот период, говорят

[1]) Энгельс, Анти-Дюринг, стр. 26, 1931 г. Подчеркнуто мной *В. М.*

они, математика была сборником заимствованных из практики правил. Доказательства отсутствовали, заменяясь подчас зрительным восприятием, выражением чего служило слово «смотри». Были даже неправильные утверждения: считалось например, что площадь равнобедренного треугольника равна половине произведения боковой стороны на основание. Второй период—научной математики—буржуазные историки математики характеризуют как период (последующий) развития математики в результате свободного творчества мышления самих математиков. Математика выступает как теория, имеет идеальные цели исследования и т. п.

«Если практика, как показывает история, и ставила задачи, то развитие математики на этой почве под преобладающим влиянием утилитаризма совершалось только в первой стадии накопления научного материала, когда об идеальных целях и стремлениях науки не могло быть и речи. Чем тоньше становилось интеллектуальное развитие, чем больше человек овладевал способностью к дедукции, освобождаясь от пут грубого эмпиризма, тем ярче вырисовывались цели познания, и тем интенсивнее работал человеческий ум в направлении возможного совершенствования начал науки безотносительно к их применимости»[1]).

Так в явной форме формулировал Г. Попов «теорию» донаучной и научной математики.

Повторяю, подавляющее большинство историков математики не говорило об этой «теории», зато они проводили ее в практике изложения и разработки проблем истории математики. Нигде не говоря о свободном мышлении математиков, они однако излагали и излагают историю «научной» математики так, как будто она упала с неба. Их сообщения об открытиях в математике чередуются в хронологическом порядке, в порядке внутриматематической проблематики, вне зависимости от открытий в других науках от развития промышленности, классовой борьбы и т. п. В результате у читателей создается впечатление, будто математика развивалась совершенно имманентно, т. е. благодаря деятельности чистого мышления самих математиков. По такому «принципу» например написано большинство имеющихся на русском языке книг по истории математики.

Был такой период в развитии математики, когда не было доказательств, когда считалось правильным и доказанным то, что является просто ошибочным[2]). Это был период первоначального накопления фактов, период, когда математика не была в полном смысле наукой, но исходя из которого она стала наукой. В оценке эмбрионального периода в развитии математики мы только в одном можем согласиться с идеалистами-историками—в том, что в то время математика не была в полном смысле наукой, так как математика становится наукой тогда и только тогда, когда она выступает как теория. Для математики, говорил Гегель, существенно доказательство, и в этом он был прав. Но мы не можем согла-

---

[1]) Попов, История математики, стр. 41, Москва 1919 г.

[2]) К этому периоду буржуазные историки относили египетскую, вавилонскую, китайскую и индусскую математику. Только греческая математика относилась ими к началу периода «научной» математики. Однако современные (1920—1930 гг.) исследования историков, как указывает Выгодский, дают много косвенных данных думать, что в Египте и Вавилоне математика была на достаточно высоком теоретическом уровне. Повидимому математика много тысяч лет назад вышла из пеленок первоначального накопления фактов и рецептуры.

ситься с идеалистами-историками в том, что в научном периоде своего развития математика развивалась имманентно. Как это ни «печально», но, выйдя из эмбрионального состояния и став в полной мере наукой, математика тем не менее не стала развиваться вследствие деятельности чистого мышления самих математиков. Только взаимосвязи в развитии математики с развитием других наук, промышленности, классовой борьбы и т. п. стали (становились и становятся) многообразнее и сложнее.

Нетрудно догадаться, почему буржуазные историки математики выдвинули «теорию» донаучной и научной математики и руководствовались ею. Большинство буржуазных историков математики придерживалось и придерживается идеалистического миропонимания. Неопровержимые же факты говорили за то, что основные математические понятия—целое число, пространственная фигура,—как и вообще вся математика на ранних этапах своего развития (Китай, Египет, Вавилон, Индия, отчасти Греция), имели причиной своего возникновения практическую деятельность людей. Во имя защиты идеализма эмбриональный период развития математики был отнесен буржуазными историками к разряду этапов развития, не «соответствующих идеальным целям и стремлениям математики». На более высоких ступенях развития было значительно труднее усмотреть материальные корни, и математически объяснить развитие математики. Поэтому предоставлялась возможность исковерканного идеалистического представления процесса развития математики путем игнорирования всех факторов ее развития, кроме внутренних потребностей самой математики. Во имя защиты и прогапанды идеализма буржуазные историки математики так и сделали, выдав продукт этой фальсификации за «научный» период развития математики.

Подобное деление истории математики не имеет ничего общего с марксистско-ленинским мировоззрением. Это деление понадобилось буржуазным историкам математики для того, чтобы под прикрытием частичного, вынужденного отступления (выделение «донаучного, грубоматериалистического» периода) защищать и пропагандировать проповедуемое ими идеалистическое мировоззрение. «Теория» донаучной и научной математики прикрывается и спекулирует на том, что, начиная с некоторого периода в развитии математики, становится трудным обнаружить материальные корни математики [1]).

Кто хотя бы мельком читал написанное Энгельсом о математике, тот не мог не заметить, что Энгельс не допускал даже мысли о подобном делении истории математики. Напротив, через все его высказывания проходит красной нитью мысль о том, что математика только потому в состоянии правильно отразить количественную сторону материальной действительности, что в конечном счете она возникла и развивается под влиянием потребностей практической деятельности человечества. Ибо только в практической деятельности человек вступает в соприкосновение с окружающим его миром, только практика подтверждает или опровергает развиваемую им при этом теорию.

[1]) О взглядах современных историков математики на проблему происхождения математических понятий говорится в статье Выгодского «Проблемы истории математики с точки зрения методологии марксизма» в сборнике «На борьбу за материалистическую диалектику в математике», Москва 1931 г.

Ни один марксист не будет отрицать того бесспорного факта, что вся математика является продуктом многовековой деятельности мышления самих математиков. Не отрицал этого и Энгельс. Только Энгельс всегда указывал на тот бесспорный факт, что и на математиков распространяется доказанная всем ходом исторического развития истина: «Не сознание людей определяет их бытие, а, наоборот, их общественное бытие определяет их сознание». Математики открывают новое в математике; содержание их работ отображает с определенной стороны материальную, существующую вне нашего сознания действительность, но они делают открытия при определенных—решающих в выборе открытий—условиях.

«Естествознание (а значит и математика.—*В. М.*) получает свою цель, равно как и свой материал, только благодаря торговле и промышленности, благодаря чувственной деятельности людей»[1]). Проблематика развития промышленности и торговли, связанная с ними проблематика других наук, философии и самой математики,—вот что дает материал, а равно и цель развития промышленности и торговли, связанная с ними и формы ее развития. К числу факторов, предопределяющих темпы и формы развития, а равно и выбор материала исследования математики, необходимо отнести классовую борьбу, поскольку вся чувственная деятельность людей, с которой связано развитие промышленности и торговли, а также и развитие других наук, находится в неразрывной взаимосвязи с интересами борющихся классов. Уже по одному этому ясно, что среди всех факторов, предопределяющих выбор материала, темпы и формы развития математики, решающими являются экономические условия существования и борьбы различных классов. А раз это так, то не было и не может быть вечных и неизменных закономерностей развития математики; в каждой общественно-экономической формации развитие математики характеризуется особыми, присущими ей законами развития, понять которые можно лишь, учитывая их специфичность.

Очень многие наши математики склонны считать фактом влияние промышленности (техники) и торговли, других наук и философии на развитие математики. Однако немногие из них соглашаются видеть в классовой борьбе фактор развития или регресса математики. Даже Плеханов отрицал классовый характер математики на том якобы простом основании, что объекты математики мало изменчивы во времени и что поэтому например теорема Пифагора имеет одинаковую значимость как для пролетария, так и для буржуа[2]).

Теорема Пифагора, а с ней вместе все фактическое содержание математики действительно равнозначащи как для пролетария, так и для буржуа. Но это отнюдь не противоречит ни факту влияния классовой борьбы на развитие математики, ни факту классового характера математики. Отрицающие роль классовой борьбы в темпах и формах развития математики забывают, что проблематика развития промышленности, наук и философии действует и выступает во взаимосвязи с развитием математики не непосредственно, а через и во взаимосвязи с ни-

---

[1]) Маркс и Энгельс, О Фейербахе, «Архив Маркса и Энгельса», кн. 1, стр. 218.
[2]) См. Плеханов, т. XI, стр. 90 — 95.

тересами борющихся классов, по преимуществу господствующего класса. Они забывают, что «класс, могущий распоряжаться средствами материального производства, располагает в то же время (благодаря этому средствами духовного производства, так что благодаря этому он господствует в то же время в общем над мыслями тех, у которых нет средств для духовного производства»[1]).

Перейдем теперь к подтверждению сказанного о влиянии развития промышленности (техники), торговли и классовой борьбы на развитие математики.

Феодализм вкупе с римско-католической церковью в течение столетий душили математическую мысль. Напротив, в эпоху Возрождения классовый интерес расцветавшей буржуазии направлял все усилия к тому, чтобы заставить математиков—не за страх, а за совесть изучать материальную действительность. «Когда Европа вышла из средневековья, расцветавшая тогда городская буржуазия была ее революционным элементом. Признанное положение, которое она завоевала себе внутри средневекового, феодального строя, стало уже слишком тесным для ее стремления к расширению. Свободное развитие буржуазии стало уже несовместимым с феодальным строем, феодальная система должна была пасть.

Великим интернациональным центром феодальной системы была римско-католическая церковь. Несмотря на все внутренние войны, она объединяла всю феодальную Западную Европу в одно огромное политическое целое, которое находилось в противоречии одинаково с греко-православным и с магометанским миром. Она окружила феодальный строй священным сиянием божественной благодати. Свою собственную иерархию она установила по феодальному образцу, и в конце концов она была самым крупным феодальным владетелем, потому что ей принадлежало не менее третьей части всего католического землевладения. Прежде чем выступить на борьбу со светским феодализмом в каждой стране и с каждым в отдельности, необходимо было разрушить эту его центральную, освященную организацию.

Шаг за шагом вместе с расцветом буржуазии шел гигантский рост науки. Возобновился интерес к астрономии, механике, физике, анатомии, физиологии. Буржуазии для развития ее промышленности нужна была наука, которая бы исследовала свойства материальных тел и формы проявления сил природы. До этого же времени наука была смиренной служанкой церкви, и ей не было позволено выходить за пределы, установленные верой; короче, она была чем угодно, только не наукой. Теперь наука восстала против церкви; буржуазия нуждалась в науке и приняла участие в этом восстании»[2]).

«Главная задача, которая предстояла естествознанию в начавшемся теперь первом периоде его развития, заключалась в том, чтобы справиться с имевшимся налицо материалом. Во всех областях приходилось начинать с самого начала. Древность имела Евклида и солнечную систему Птоломея, арабы—десятичное исчисление, начала алгебры, современную систему исчисления и алхимию; христианское средневековье не оставило ничего. При таком положении вещей естественно, что первое место заняла элементарнейшая отрасль естествознания—механика земных и небесных

---

[1]) «Архив Маркса и Энгельса», т. I, стр. 230.
[2]) Энгельс, Анти-Дюринг, стр. 283, 1932 г.

тел, а наряду с ней, на службе у нее, открытие и усовершенствование математических методов. Здесь были совершены великие дела. В конце рассматриваемого периода, отмеченного именами <Лейбница, и> Ньютона и Линнея, эти отрасли знания получили известное завершение. Важнейшие математические методы были установлены в основных чертах: аналитическая геометрия главным образом Декартом, логарифмы—Непиром, диференциальное и интегральное исчисления—Лейбницем и может быть Ньютоном»[1]).

Великая французская революция,—третье восстание буржуазии против феодализма, давшее ей полноту власти,—создала Нормальную Политехническую школу, которая, как отмечает Клейн, была создана сначала для подготовки офицеров революционной, а позже наполеоновской армии. В Нормальной Политехнической школе в трудах Монжа (ее организатор и руководитель), Понселе, Лапласа, Фурье, Коши, Кориолиса и др. получили блестящее развитие механика, физика и математика. В связи с открытием паровой машины и началом ее промышленной эксплоатации в Нормальной Политехнической школе получают интенсивное развитие механика и физика.

В области механики значительные результаты принадлежат Понселе и Кориолису. Их «сочинения имеют одну и ту же по существу тенденцию: в противовес абстрактным формулировкам лагранжевской «Mecanique analytique» («благородная, свободная от трения механика») они стремятся дать синтетическое обозрение проявляющихся в машинах действий сил с учетом фактически имеющих место обстоятельств, как трение и т. п.» (К л е й н).

Из работ в области физики, в сфере которой работали Пуассон, Фурье и Коши, отметим работу Фурье «Théorie analutique de chaluer» (1882), в которой он, рассматривая проблемы теплопроводности, пришел к тригонометрическим рядам, оказавшим впоследствии огромное влияние на развитие математики.

Благодаря развитию фортификационных, строительных и геодезических работ, как отмечают Клейн и Фуку[2]), в Нормальной Политехнической школе получают особое развитие проективная и начертательная геометрия и теория поверхностей. Работы Понселе и Гаусса (Германия) делают эпоху.

Есть основания думать, что в неразрывной связи с происходившими событиями стоит открытие неевклидовой геометрии[3]).

---

[1]) Э н г е л ь с, Диалектика природы, стр. 880, 1932 г.

[2]) Ф у к у, История труда, природы и человека, перевод с французского, Спб. 1872 г.

[3]) Пусть например читатель сравнит взгляды Лобаченского на происхождение понятий геометрии со следующим замечанием Клейна: «В 1792 г. было предпринято точное градусное измерение расстояния между Дюнкирхеном и Барселоной, в котором Лежандр принимал самое горячее участие как теоретически, так и практически. Лежандр имеет крупные заслуги в деле этого первого точного градусного измерения, которое легло в основу введения метра в качестве единицы длины и вообще сыграло большую роль в теоретической разработке геодезии. Эта работа привела Лежандра к важным теоремам сферической тригонометрии. Но и здесь также Лежандру не было суждено дойти до глубокой идеи Гаусса, возникшей у последнего как раз в связи с подобного же рода работами, а именно идеи возможности неевклидовой геометрии.» «Многие идеи, писал В. Больяи, как бы имеют свою эпоху, во время которой они открываются одновременно в различных местах, подобно тому как фиалки весной произрастают всюду, где светит солнце».

Мы не исчерпали и половины того, чем обязана математика творчеству математиков Нормальной Политехнической школы. Но, полагаем, сказанного достаточно для того, чтобы получить хоть бы самое элементарное представление об огромной роли развития промышленности и классовой борьбы в развитии математики во время Великой французской революции. Нормальная Политехническая школа в начальном этапе своего существования знаменует собой конец того периода в развитии математики, который неразрывно связан с эпохой буржуазных революций. Поэтому, суммируя, можно сказать так: в эпоху буржуазных революций буржуазии было необходимо развитие математики, так как в то время математика являлась действенным оружием буржуазии в борьбе за власть как над природой, так и с отживающими феодализмом и крепостничеством.

За все время существования буржуазного строя эпоха буржуазных революций характеризовалась наибольшим, в пределах возможного в буржуазном строе, единством математики с практикой. Именно в силу того, что буржуазия шла под флагом освобождения «всего» человечества от ига феодализма, в эпоху буржуазных революций на математику смотрели как на универсальное, действенное оружие *изменения* действительности. Подобному взгляду на математику способствовало еще и то, что в то время над всем знанием превалировала механика—отрасль знания, значение математики для которой огромно, философия же была исключительно метафизической. Через Галилея [1]), Декарта [2]), и Ньютона [3]) этот взгляд получил завершение во время Великой французской революции. Лаплас гордо настаивал на возможности существования гениального ума, способного в одной математической формуле объять прошлое, настоящее и будущее вселенной [4]).

Уничтожив феодальную форму собственности в пользу собственности буржуазной, буржуазия стала полноправным хозяином. «Менее чем в сто лет своего господства буржуазия создала более могущественные и более грандиозные производительные силы, чем все предшествующие поколения, взятые вместе» [5]). Буржуазия создала всемирный рынок, порвала рамки национальной замкнутости, «как в области материального, так и в области духовного производства». Создание центров научной мысли, международная связь научных учреждений, журналы, съезды и т. п.—все это создавало грандиозные возможности развитию математики. XVIII в. дал в основном учение о дифференциальных уравнениях в самом общем виде, вариационное исчисление, аналитическую геометрию и аналитическую механику. XIX столетие, включая начало XX, привнесло в сокровищницу математики теорию функций комплексного переменного, теорию функций действительного переменного, интегральные уравнения, функци-

---

[1]) Галилей писал: «Философия написана в грандиознейшей книге, которая всегда открыта для всех и каждого (я говорю о вселенной); но не может ее понять тот, кто раньше не научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, и знаки ее суть треугольники, круги и прочие математические фигуры».

[2]) См. Декарт, Рассуждение о методе, ч. 1.

[3]) См. Ньютон, Математические принципы натуральной философии и «Оптика».

[4]) См. Лаплас, Опыт философии теории вероятностей, перевод с французского Москва 1908 г.

[5]) Маркс и Энгельс, Коммунистический манифест.

циональный анализ, неевклидовы геометрии, топологию, тензорный и векторный анализ, небывалое развитие учения о рядах, теории групп и т. п. Со стороны фактического содержания несомненно XIX столетие и начало XX дали математике значительно больше, чем все ее предшествующее развитие. Математика подошла и занялась анализом самых основных вопросов, неразрывно связанных с философией (проблема континуума и бесконечного, математическая логика, вопросы обоснования геометрии и т. п.).

Но зато как оружие классовой борьбы математика была направлена против мировоззрения революционного пролетариата. На смену материалистической трактовке вопросов методологии математики пришел в разнообразных формах математический идеализм. Представить математику в качестве «научного аргумента» в пользу идеалистического миропонимания и тем самым противопоставить ее всякому материализму, в особенности научному мировоззрению пролетариата—марксизму (сейчас—марксизму-ленинизму),—такова была и есть центральная общественная цель всякого математического идеализма[1]).

Все основные вопросы философии математики—происхождение и закономерности развития математических понятий, предмет математики, место математики в в системе наук, критерий истины математики, которые во время Великой французской революции ставились и решались материалистически, были переработаны в идеалистическом духе. Все эти изменения в понимании основных вопросов методологии математики не могли не отразиться и на самой математике; актуальные проблемы математики, в особенности конкретные вопросы обоснования математики, стали рассматриваться многими математиками под углом зрения не только требований самой математики, но и требований какой-нибудь из форм математического идеализма[2]).

Неравномерность развития буржуазного общества, обратное влияние математического идеализма привели математику, несмотря на все ее огромное развитие, к неравномерному развитию разделов математики, к усиливающемуся в ряде областей отрыву от практики, к предпочтительному развитию наиболее абстрактных разделов математики. В результате целые отрасли математики—теория чисел, теория групп, отчасти теория функций действительного переменного и топология—получили вид совершенно оторванных от человеческой деятельности отраслей знания. «Я сказал бы,—писал Клейн,—что математика в наши дни напоминает мне крупное оружейное производство в мирное время. Витрина заполнена образцами, которые своим остроумием, искусным, пленяющим глаз выполнением восхищают знатока. Собственное происхождение и назначение

---

[1]) Во избежание недоразумений подчеркну, что я говорю только об общественной значимости математического идеализма.

[2]) Так например в книге «Mathematische Existens» Оскар Беккер доказывает, что предлагаемая интуиционистами (Брауэр, Вейль) реформа математики обосновывается (в положительной своей части) не столько соображениями внутриматематического характера, сколько требованиями их философской установки. Пусть читатель прочтет и продумает работы Дедекинда: «Что такое числа и для чего они служат» и «Непрерывность и иррациональные числа». Дедекинд очень отчетливо показывает сам, к чему обязывает его идеалистическая философия математики в области обоснования понятия иррационального числа.

этих вещей, их способность стрелять и поражать врага отходят в сознании на задний план и даже совершенно забываются».

Итак мы можем сделать следующие выводы:

Как в эпоху буржуазных революций, так и в последующем периоде своего развития в буржуазном обществе математика получала и получает «свою цель, равно как и свой материал, только благодаря торговле и промышленности, благодаря чувственной деятельности людей».

В силу этого математика, как и прочие естественные науки, отражает одну из сторон (количественную) материальной действительности.

Как в эпоху буржуазных революций, так и в последующем периоде своего развития математика являлась и является действенным оружием буржуазии. В эпоху буржуазных революций классовый интерес буржуазии заставлял использовать математику и как оружие покорения природы и как оружие преодоления феодализма. Промышленный капитализм и империализм использовали и используют математику и как средство покорения природы[1]) и как средство подавления революционного пролетариата и его мировоззрения.

Классовый характер математики заключается еще и в том, что в сознании собственного содержания- понимании своего предмета, «построении» своего предмета или иначе в логическом его развитии—математика в буржуазном обществе бессильна освободиться от влияния буржуазной идеологии и философии[2]).

Мы всемерно заинтересованы в развитии математики. Развивать математику нам необходимо для того, чтобы через посредство удовлетворения запросов других наук, а также и непосредственно способствовать росту нашей промышленности и сельского хозяйства. Но понимая характер закономерностей развития математики, мы пытаемся развивать математику планово. Наши математические институты—Московский, Ленинградский и др.—строят свои планы научно-исследовательской работы так, чтобы, развивая математику как теорию[3]), вместе с тем удовлетворить запросам практики нашего социалистического строительства.

Это только первые наши шаги в деле планового развития математики.

---

[1]) В последние годы эта сторона целевой установки развития математики меньше всего интересует буржуазию; кризис сказался и здесь. Буржуазия только однобоко сейчас заинтересована в развитии математики как средства покорения природы — с точки зрения военной техники.

[2]) Интересно изучить сходство и различие взаимосвязей между классовой борьбой, экономикой и математикой, с одной стороны, и между политэкономией, с другой стороны.

[3]) Часто утверждают: плановое развитие математики должно иметь целью удовлетворение запросов соцстроительства сегодняшнего дня; надлежит развивать только те разделы математики, кои способны удовлетворить этому требованию. Это утверждение неправильно. Нужно планировать развитие математики, имея в виду удовлетворение запросов как практики, так и перспективы соцстроительства. Достигнуть же этого можно не односторонним развитием некоторых разделов, а плановым развитием всей математики как науки. Как увидим из дальнейшего, столь «революционно» обоснованное планирование развития математики просто невозможно.

Но даже они в практике работы институтов показывают, что марксистское понимание математики есть правильное, а потому и действенное оружие, дающее ценные результаты в деле развития математики.

Для А. Пуанкаре факт возможности применять математику в практике был не больше чем счастливой случайностью, проистекающей от некоторых свойств нашего духа, который к тому же он не мог объяснить. Будущее математики как для него, так и для всех идеалистов-математиков всегда было покрыто мраком неизвестности. Да и что в самом деле может сказать идеалист-математик о будущем своей науки, если с его точки зрения развитие математики имманентно? Провозгласить развитие математики совершенно свободным и возвеличить эту «свободу» в священный сан? Да! Именно так поступил Пуанкаре, именно так поступает подавляющее большинство идеалистов-математиков. Им ничего не остается другого, как прикрыть этими словами невозможность для всякого математического идеализма научно объяснить—а значит и предвидеть—реальный процесс развития математики [1]).

Продвигаясь в нашем умении планово развивать математику, мы с каждым разом сможем все больше и больше говорить о будущем нашей науки, все больше и больше подтверждать, что марксистское понимание математики не догма, а руководство к действию.

Анализируя вопрос о закономерностях развития математики, некоторые товарищи представляли экономическую необходимость как единственный определяющий момент в развитии математики. Делать таких выводов нельзя. Со стороны предопределения материала исследования, а также темпов и форм развития математики экономическая необходимость, связанная с классовой борьбой, с общественной деятельностью людей, является решающей. Однако это не исключает, а, наоборот, предполагает, что и другие науки, философия и т. д., относительно которых справедливо только что сказанное о математике, поставляют математике материал исследования, а также предопределяют в известной мере темпы и формы ее развития. Обусловливается это тем, что вырастающая из экономической необходимости проблематика развития промышленности (техники) и торговли влияет на математику не только непосредственно, но и косвенно, через другие науки, в силу чего развитие математики как со стороны получения материала исследования, так и со стороны темпов и форм развития в значительной мере зависит от уровня развития науки и философии в целом. История показывает, что развитие математики особенно тесно переплеталось с развитием астрономии, механики, физики и философии.

Действительно, когда в силу развития промышленности и торговли, в силу производственной деятельности людей вырастает необходимость исследования новых процессов природы, то к исследованию этих процессов, по причинам значительной сложности их содержания, вынуждены подходить со всем запасом данных современной нам науки. Если современное нам научное знание не способно объяснить эти процессы, то исследованием их начинают заниматься ученые ряда связанных, родственных

---

[1]) В наших условиях социальная значимость рассуждений о «свободе» развития математики эквивалентна отрицанию планирования развития математики и тем самым необходимости органической связи математики с социстроительством.

дисциплин, так как каждая научная дисциплина имеет своей задачей исследование одной из форм движения материальной действительности. В результате совместных усилий ученых, если они объяснили эти процессы природы, каждая их область обогащается новым содержанием, а промышленность (техника) и торговля по удовлетворении их запросов получают новый импульс к дальнейшему развитию. В истории науки бывали случаи, когда научное знание значительно отставало от быстро растущих потребностей промышленности и торговли. Чаще это случалось во время коренных революционных ломок в существующих общественных отношениях, как например в эпоху Возрождения и в эпоху Великой французской революции. Для науки наступали тогда периоды бурного развития, так как интересы революционного класса требовали от нее скорейшего удовлетворения запросов промышленности и торговли и всячески содействовали росту научного знания. Такую же картину можно наблюдать и у нас в СССР. Еще в 1929 г. в речи на конференции аграрников-марксистов т. Сталин указал на недопустимое отставание нашего теоретического фронта от быстро растущих запросов нашей социалистической промышленности и сельского хозяйства, вступившего на путь социалистической перестройки. С тех пор прошло только три года, но мы уже видим бурное развитие всех отраслей знания, включая и математику[1]), причем на развитие науки нашим правительством отпускаются огромные материальные суммы, а работникам науки оказывается поддержка в самых разнообразных формах. Но во всех этих случаях наука бывала вынуждена исходить из имеющегося в ее распоряжении материала, а потому начинать анализ новых процессов природы с самого простейшего в них или, по причинам своей неразвитости, давать грубо приближенные объяснения исследуемых процессов природы в целом. В конце концов, идя по такому пути, она добивалась требуемых от нее результатов.

Задача заключается не в том, чтобы игнорировать влияние других наук и философии на развитие математики, а в том, чтобы вскрыть, как взаимодействие проблематики экономической необходимости других наук и философии, где проблематика экономической необходимости является решающей, влияет на развитие математики.

В качестве примера вспомним сказанное Энгельсом о проблемах и развитии науки в эпоху Возрождения. Центральная задача естествознания эпохи Возрождения состояла в исследовании «свойств материальных тел и форм проявления сил природы». Необходимость подобных исследований диктовалась потребностями промышленности и торговли, в развитии которых всемерно была заинтересована нарождающаяся буржуазия. Короче говоря, эпоха Возрождения поставила перед естествознанием, а также и перед математикой задачу исследования разнообразных форм движения материи. Нетрудно показать, что эта многогранная задача, даже в ее простейших случаях, ставила перед математикой проблемы аналитической геометрии и анализа (дифференциальное и интегральное исчисление). В самом деле, представим, что нам необходимо исследовать скорость движения материальной точки по некоторой траектории. Если

[1]) См. сборник «Математика в СССР за 15 лет». Однако, как указывают авторы сборника, сборник не исчерпывает в описании всего сделанного советской математикой за 15 лет ее существования.

эта точка движется равномерно, то постоянное отношение $\frac{s}{t}$ дает нам искомую скорость. Совсем иная картина получается, если точка движется неравномерно, — тогда $\frac{s}{t}$ уже не будет постоянной величиной. Чтобы все же поставленную задачу решить, мы должны будем взять среднюю скорость $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ и, приближая t_2 к t_1, рассматривать скорость точки в момент t_1 как предел, к которому стремится отношение $\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ при приближении t_2 к t_1. Поступая так, мы вынуждены ввести понятие переменной величины вообще, и бесконечно малой в частности, т. е. рассматривать искомую скорость как момент переменного, становящегося.

Поставим себе теперь задачей вычислить массу тела, объем которого v. Если материя тела однородна, т. е. плотность $S = \frac{\Delta m}{\Delta v}$ есть величина постоянная, то задача совершенно элементарна, и решение ее доступно математике постоянных величин. Если же материя не однородна, то получаются затруднения, преодолеть которые можно только методами математики переменных величин. Нам нужно вновь прибегнуть к переменным величинам и понятию предельного перехода. Мы ищем плотность распределения материи тела, т. е.

$$\lim \frac{\Delta m}{\Delta v} = j(M),$$

что в предположении достаточной близости Δv к нулю приближенно дает:

$$m \quad \sum_v \Delta m \quad \sum_v j(M) \Delta v.$$

Точный результат мы получаем с помощью предельного перехода, так как в этом случае

$$m = \iiint_v j(M)\, dv = \lim_{n \to \infty} \sum j(M)\, \Delta v.$$

Аналогично, в тесной взаимосвязи с проблемами астрономии, механики и физики к такого же рода операциям приводили задачи на нахождение центров тяжестей тел, задачи на максимум и минимум и т. п.

Через астрономию, механику и физику (оптику) все эти задачи были постепенно поставлены проблематикой промышленности и торговли эпохи Возрождения. Но могла ли математика решить их в короткий промежуток времени, сразу взявшись за их решение? Нет, не могла. В области научного знания по существу средневековье не оставило эпохе Возрождения ничего. Поэтому нужно было начинать с развития имеющегося налицо материала. Начало развития естествознания, а равно и математики характеризовалось освоением науки древних, т. е. в области математики освоением математики постоянных величин. К этому же периоду относится открытие десятичных дробей, усовершенствование алгебры, открытие логарифмов и т. п. [1]).

---

[1]) Этот период начинается во второй половине XV столетия и «кончается» исследованиями Кеплера и Кавальери. Тарталья, Кардан и Феррари дают решение уравнений 3 и 4-й степеней. Виета совершенствует символику алгебры. Непир открывает логарифмы.

Только после и наряду с тем как астрономия и механика накопили достаточную сумму фактов о разнообразных формах механического движения, математика, достаточно подкрепленная и усовершенствованная, смогла подойти к анализу этих задач. Все еще опираясь на методы древних (Архимед), Кеплер и Кавальери создают способ «неделимых», над которым еще сильно тяготеют обычные представления математики постоянных величин. На пути решения стоящих задач математика добилась подлинного триумфа только в связи с открытием аналитической геометрии. «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика, и благодаря этому стало немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление, зачатки которого вскоре были заложены и которое было в целом завершено, а не открыто Ньютоном и Лейбницем»[1]). Только совокупное действие методов дифференциального и интегрального исчисления и аналитической геометрии дало тот аппарат, с помощью которого можно было успешно двигаться в решении задач естествознания, промышленности и торговли.

Рассмотрение влияния развития промышленности, торговли, классовой борьбы, других наук и философии на математику позволило нам установить решающие источники материала исследования и темпов развития математики. Однако вопрос о необходимых формах развития математики остался открытым. Сама постановка вопроса и анализ нематематических факторов развития математики не позволили нам вскрыть эти формы: в порядке предшествующего исследования мы только могли утверждать необходимость, обусловленность форм развития математики, но не вскрывать их. Анализ необходимых форм развития математики является нашей ближайшей задачей.

Вопрос о необходимых формах развития математики нераздельно связан и переходит в вопрос о диалектике математических понятий. Мы поэтому будем анализировать этот вопрос не во всей его полноте, а только с интересующей нас точки зрения: в какой мере необходимые формы развития математики сами являются факторами дальнейшего развития математики.

В эмбриональном периоде развития математики единственная и необходимая ее форма развития выражалась в накоплении разрозненных, элементарных представлений о простейших количественных соотношениях и пространственных формах реального мира[2]).

Значительно сложнее необходимые формы развития математики как теории. Современный например математик не может ограничиться простым коллекционерством, описыванием количественных соотношений и пространственных форм действительности. Его задача неизмеримо сложнее—она состоит не только в том, чтобы открыть новые количественные соотношения, но еще и в том, чтобы вскрыть взаимосвязи между новыми и известными уже количественными соотношениями, в противном случае он не может дать действительно научного, правильного отображения количественных соотношений материальной действительности. Поэтому, когда ставится новая проблема, поставленная проблема-

[1]) Энгельс, Диалектика природы, стр. 30—31, 1932 г.

[2]) Вероятнее всего, что эмбриональный период развития математики датируется от конца палеолита.

тикой промышленности, других наук или самой математикой, которая требует анализы новых количественных соотношений, математик должен, исходя от современного ему уровня развития математики, так развить старые математические понятия, чтобы они смогли охватить, отобразить новые количественные соотношения в связи со старыми. В силу этого всякая новая математическая теория должна быть развита из существующих математических теорий, а потому и примкнуть к ним.

Так под влиянием практических потребностей понятие целого числа было сначала развито до понятия дробного, а потом и иррационального числа, вследствие чего, при подобном же возникновении и развитии понятия нуля, математика обосновала понятие как рациональных, так и вещественных чисел. Так развивались под явно выраженным влиянием других наук и экономической необходимости дифференциальное и интегральное исчисление, аналитическая геометрия, дифференциальная, геометрия, начертательная геометрия и т. п.

Отсюда уже непосредственно следует и становится понятным что, как только из разрозненных фактов создается математическая теория, она следует собственному движению, над которым в общем и целом (т. е. в основном через ряд промежуточных звеньев) господствуют экономическая необходимость и требования других наук. Но в отдельных частностях и внутри этой общей зависимости каждая математическая дисциплина следует своим собственным законам, которые присущи ее предмету.

Именно поэтому возникновение всякого математического понятия не всегда сопряжено с непосредственным влиянием экономической необходимости и других наук. Оно может быть значительно сложнее, действуя задним числом через математику. Пусть возможность подобного развития всякой математической теории ограничена в каждом случае известными рамками сообразно природе исследуемых объектов—она всегда существует. Было бы нелепо например отрицать такой характер доказательства закона взаимно простых чисел, доказательства существования трансцендентных чисел, введения интеграла Lebesque, разработки отдельных проблем обоснования математики и т. п. Надо только отдавать себе отчет в том, что возможность «имманентного» развития математики именно и существует только потому, что каждая математическая теория, отражая во взаимосвязях одну из сторон материальной действительности, тем самым поставляет самой себе тот основной, качественно своеобразный материал, из которого она может делать дальнейшие выводы. «Выведение математических величин (а также новых теорем и теорий.—*В. М.*) как будто бы друг из друга доказывает не их априорное происхождение, но только их рациональную связь»[1]). Не будь этой возможности, математика никогда не была бы теорией. В лучшем случае математика была бы сборником разрозненных рецептов. И именно поэтому «в истории математической науки торжество новых понятий не может пошатнуть истин, уже приоб

[1]) Энгельс, Анти-Дюринг, стр. 26, изд. 1932 г.

ретенных, оно может изменить только положение их в науке и увеличить или уменьшить их значение и их пользу»[1]).

Раз возникнув, всякая математическая теория (открытие) в той или иной степени влияет на дальнейшее развитие математики. При ближайшем рассмотрении содержание этого влияния оказывается взаимодействием в развитии всей математики с новыми математическими теориями (открытиями). Оно содержит три момента.

Во-первых, развитие новой математической теории есть тем самым развитие самой математики.

Во-вторых, в свете новых понятий старые математические понятия получают новое содержание, перерастают в новые данные математики и тем самым обратно оттеняют понятия новой математической дисциплины, развивают их. Достаточно вспомнить, какое оказало влияние открытие дифференциального и интегрального исчисления на развитие математики (дифференциальная геометрия например). Пути развития математики не похожи на прямую шоссейную дорогу, где при движении вперед никогда нельзя возвращаться к пройденному участку пути. Математика развивается на основе диалектических закономерностей, где каждый шаг вперед есть возвращение с более богатым содержанием назад, где нет прямой линии, а есть круг кругов[2]).

В-третьих, развитие новой математической теории в большинстве ставит новые вопросы в проблемах обоснования математики, ибо задача обоснования математики состоит в том, чтобы вскрыть взаимосвязи между математическими дисциплинами в их конкретном содержании и тем способствовать дальнейшему развитию математики.

Общая взаимосвязь всех математических дисциплин в их развитии — вот что характеризует развитие всей математики. Поэтому математика как теория следует собственному движению, над которым в основном господствуют взаимозависимости экономической необходимости других наук и философии. Но в отдельных частностях и внутри этой общей зависимости математика следует своим собственным законам, которые присущи ее предмету.

Именно потому, что развитие математики, как и других наук, закономерно и обусловлено материально-общественной деятельностью человечества, математика есть целостная, развивающаяся, и притом по диалектическим закономерностям, наука, все конкретнее и содержательнее отображающая пространственные формы и количественные соотношения материальной действительности.

Работающие творчески в области математики достаточно хорошо понимают необходимые формы развития математики, что однако не мешает им не видеть их первопричины. Проблематика самой математики прежде всего бросается в глаза, в то время как обнаружение влияния экономической необходимости и классовой борьбы на математику требует сравни-

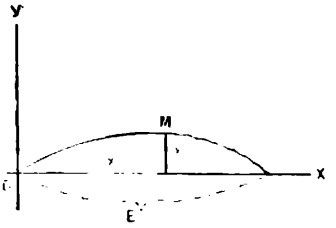
[1]) Бельтрами, Опыт представления неевклидовой геометрии, сборник «Об основаниях геометрии», стр. 1, Казань, 1895 г.

[2]) Этому вопросу Энгельс уделяет значительное внимание в «Диалектике природы». См. например его замечания о нуле, единице, единстве действий арифметики и т. п.

тельно большего анализа условий развития математики. Поэтому ограничимся одним примером, подтверждающим сказанное о необходимых формах развития математики.

Известно, что понятие о тригонометрическом ряде возникло в середине XVIII столетия в связи с исследованиями о колеблющихся струнах. Форма колеблющейся в плоскости струны, при некоторых допущениях, определяется диференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$



где y—отклонение точки M струны от положения равновесия, x—абсцисса точки M, t—время, α—const.

Решением этой задачи занимались крупнейшие математики XVIII столетия: Д'Аламбер, Тэйлор, Эйлер, Бернулли, Лагранж. Д'Аламбер первый показал, что при соблюдении граничных условий ($y(0)=0, y(l)=0$) данному диференциальному уравнению удовлетворяют периодические функции вида: $y(x)=f(x)=f(2l+x)$.

В то время когда Эйлер успешно продолжал разрабатывать результаты Д'Аламбера, Бернулли, частично основываясь на наблюдениях и на результатах, ранее полученных Тэйлором, показал, что при тех же граничных условиях данному диференциальному уравнению удовлетворяют функции вида:

$$y=\sum a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}(t-b_n).$$

Бернулли счел свое решение самым общим, так как оно давало положительное объяснение всем его наблюдениям над колеблющимися струнами. Однако это умозаключение Бернулли вызвало много возражений. Дело в том, что в то время представление о функции было крайне элементарно. Поэтому многим математикам казалось странным, даже невозможным, чтобы такая произвольная кривая, какой в сущности является выведенная из состояния равновесия струна, могла быть представлена тригонометрическим рядом. Решение Бернулли окажется общим, говорили они, только тогда, когда будет доказана возможность выражения произвольной функции с помощью тригонометрического ряда.

Несмотря на другие исследования, вопрос оставался в достаточно неопределенном положении около 50 лет. Его неопределенность разбили исследования Фурье. Как мы отмечали выше, в связи с открытием паровой машины и началом ее промышленной эксплоатации Фурье занимался проблемами теплопроводности и пришел к тригонометрическим рядам. Он первый обратил внимание на тот факт, что в тригонометрическом ряде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx + a_n \sin nx$$

коэфициенты a_n и b_n определяются формулами:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Больше того, он увидел, что этот способ разложения функции в ряд применим к достаточно обширному классу произвольных функций.

Никакие возражения не смогли поколебать результатов Фурье, так как именно ему принадлежат результаты, давшие базу для развития теории тригонометрических рядов. В ряде мемуаров Дирихле, Римана и другие математики ставят и решают центральную для теории тригонометрических рядом проблему: каким условиям должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы ряд $\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx \quad a_n \sin nx$, в котором коэфициенты a_n и b_n определяются по формулам Фурье, сходился к данной функции $f(x)$.

Развитие теории тригонометрических рядов оказало революционизирующее влияние на математику. Оказалось необходимым развить понятие функции; от функции в смысле Эйлера перешли к функции в смысле Дирихле. Получило развитие понятие интеграла—интеграл Римана,—так как выяснилось, что интеграл Коши не может удовлетворить всем запросам при решении основной проблемы теории тригонометрических рядов. Была поставлена на научную базу общая теория рядов, до этого же времени на бесконечные ряды смотрели как на простые алгебраические суммы и фактически постулировали в отношении к ним полную приложимость законов конечных сумм, что конечно в общем неверно. Наконец вновь были отнесены к требующим разработки вопросы обоснования анализа в целом. В настоящее время трудно оценить то значение, какое получила в математике теория тригонометрических рядов.

В лице теории тригонометрических рядов механика и физика получили мощное орудие исследования[1]).

В целях «популяризации» идей марксизма в области математики некоторые товарищи предпочитали не говорить о необходимых формах развития математики[2]). Они ограничивались анализом материальных корней математики, указывая на влияние промышленности, торговли, других наук и философии на развитие математики; точнее—ограничивали себя анализом факторов, предопределяющих выбор материала исследования математики. Энгельс, напротив, никогда не пренебрегал конкретным анализом необходимых форм развития математики; чтобы в этом убедиться, достаточно внимательно прочесть его замечания о развитии математики в эпоху

---

[1]) См. Дирихле, О сходимости тригонометрических рядов; Риман, О возможности выражения функции при помощи тригонометрического ряда; Клейн, Вопросы элементарной и высшей математики, гл. II, разд. IV С и Д; Brunschvieg, Les etapes de la philosophie mathematique, p. 325 — 342, 129.

[2]) Такая «скромность» присуща ряду авторов сборника «На борьбу за материалистическую диалектику в математике».

Возрождения. Необходимыми формами развития математики нельзя пренебрегать, коль скоро хотят научно представить реальный процесс развития математики; подобное пренебрежение—одна из форм упрощенчества [1]).

Нельзя пренебрегать необходимыми формами развития математики еще и потому, что подобное пренебрежение, упрощая марксистский взгляд на развитие математики, обезоруживает нас перед всяким математическим идеализмом.

Любой математический идеализм—логистика, конвенционализм, формализм, интуиционизм, например в вопросе о развитии математики есть абсолютизация необходимых форм развития математики, т. е. односторонне преувеличенное, оторванное от материально-общественной деятельности и других наук представление развития математики как развития в силу одних внутренних закономерностей, называемых идеалистами имманентными (чистый разум, интуиция и тому подобные первопричины) [2]). Простейший тому пример—«теория» донаучной и научной математики. Поэтому каждый математический идеализм может значительно успешнее бороться, коль скоро будет или забыто или извращено правильное представление о необходимых формах развития математики. Марксист, забывший о необходимых формах развития математики, ничем не отличается от эмпирика. Эмпиризм же, как показал опыт Милля и других эмпириков, никогда не может бороться против идеализма в вопросе о происхождении математических понятий. Напротив, правильно понятое содержание необходимых форм развития математики бьет математический идеализм со стороны его теоретического основания.

Возникнув, всякая математическая теория, непосредственно или через посредство других математических теорий, если к этому есть соответствующие условия в общественно-

---

1) «Много легче, — писал Маркс, — посредством анализа найти земное ядро причудливых религиозных представлений, чем, наоборот, из данных отношений реальной жизни вывести соответствующие им религиозные формы. Последний метод есть единственно материалистический, а следовательно научный метод». («Капитал», т. I, стр. 281, изд. 5-е, Примечание.) Понятно, что сказанное Марксом о религии целиком и полностью относится к математике.

2) У нас вошло в обычай только ругать математический идеализм, сбрасывая «с порога» все его выводы. Но это не диалектико-материалистическая критика математического идеализма. «Философский идеализм, — писал Ленин, — есть только чепуха с точки зрения материализма грубого, простого, метафизического. Наоборот, с точки зрения диалектического материализма философский идеализм есть одностороннее, преувеличенное überschwengliches (Dietzgen) развитие (раздувание, распухание) одной из черточек, сторон, граней познания в абсолют, оторванный от материи, от природы, обожествленный. Идеализм есть поповщина. Верно. Но идеализм философский есть («вернее» и «кроме того») дорога к поповщине через один из оттенков бесконечно сложного познания (диалектического) человека» («Ленинский сборник» XII, стр. 326). Критикуя математический идеализм — а к любому математическому идеализму сказанное Лениным также применимо, как и к идеализму философскому, — надо показать, на чем он спекулирует, какие стороны, оттенки диалектического развития математики и самой математики он возводит оторванно от материи — в абсолют, критикуя, исправлять выводы математического идеализма и тем самым преодолевать его.

экономической формации, в той или иной степени влияет на развитие производительных сил других наук и философии, выступает как оружие классовой борьбы и т. п. «Как и во всех областях мышления, отвлеченные из действительного мира законы на известной ступени развития отрываются от действительного мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, по которым должен направляться мир. Так было с обществом и государством; так, а не иначе, применяется впоследствии чистая математика к миру, хотя она и заимствована из этого мира и представляет только часть его составных форм, и собственно только поэтому она вообще применима к нему» [1].

Суммарно:

Процесс развития математики — момент процесса развития знания; развитие же знания основано на экономическом развитии. Иначе говоря, процесс развития математики есть составной момент процесса взаимодействия между экономической необходимостью, классовой борьбой, другими науками, философией и т. п., в котором (взаимодействии) экономическая необходимость оказывает решающее влияние.

Не было и не может быть имманентного, основанного на деятельности «чистого» мышления развития математики. Само чистое мышление не существовало и не существует.

Развитие математики закономерно; задача научной истории математики заключается в том, чтобы вскрыть эти закономерности, представить процесс развития математики в его необходимости.

Таково в кратких чертах учение Энгельса о происхождении и факторах развития математических понятий, представляющее цельный контрответ на первое утверждение как Дюринга, так и всякого идеалиста-математика [2].

В заключение сделаем два замечания:

Во-первых, интересно отметить, что некоторые — правда, одиночки из лагеря буржуазных математиков смутно понимали, вернее, чувствовали наличие связей в развитии промышленности, математики и других наук [3]. Под влиянием буржуазной идеологии и философии они не могли подняться до диалектико-материалистического понимания этих связей. Они не смогли увидеть — в этом их взгляды совпадают со взглядами сторонников буржуазной теории «факторов», что математика отражает количественную сторону материальной действительности; не смогли (разве за исключением Чебышева) понять, что является решающим во взаимодействии промышленности, других наук и математики. Может быть лучшим показателем этой их ограниченности послужит то, что все они не могли увидеть в классовой борьбе фактора развития математики, не могли понять классового характера математики, а потому и не могли понять, что будущее математики целиком и полностью связано с будущим революционного пролетариата, со строительством социализма.

---

[1]) Энгельс, Анти-Дюринг, стр. 26, изд. 1932 г.

[2]) Тем самым, естественно, дан ответ и на второе утверждение Дюринга.

[3]) Я говорю о математиках XIX и XX столетий.

Из числа этих одиночек выделяются Чебышев и Клейн, имена которых достаточно известны каждому образованному математику.

Клейн неоднократно указывал на неразрывную связь в развитии промышленности, механики, физики и математики. Его указаний мы коснулись при рассмотрении развития математики во время Великой французской революции. Что же касается Чебышева, то мы просто приведем его достаточно известные слова о этой связи. «Науки математические,—писал он,—с самой глубокой древности обращают на себя особое внимание: в настоящее время они получили еще более интереса по влиянию своему на искусства и промышленность. Сближение теории с практикой дает самые благотворные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает: сами науки развиваются под влиянием ее, она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах, давно известных. Несмотря на ту высокую степень развития, до которой доведены науки математические трудами великих геометров трех последних столетий, практика обнаруживает ясно неполноту их во многих отношениях; она предлагает вопросы, существенно новые для науки, и таким образом вызывает на изыскание совершенно новых метод. Если теория много выигрывает от новых приложений старой методы или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метод, и в этом случае наука находит себе верного руководителя в практике»[1]).

«Мы должны указать,—пишет Кэйлей,—как много математика своими успехами обязана физическим наукам и обыденной жизни. Вопросы практики и естествознания при приложении к ним математического метода наводят нас на новые, еще не разрешенные задачи чистой математики. Эти задачи исследуются уже чисто математическим путем; возникают новые теоремы и учения, которые затем, вполне законченные и выработанные, находят себе широкое применение в прикладном нашем знании. Развитие математики особенно тесно сплелось с развитием физики, астрономии и механики».

Обращаясь к давно прошедшему, мы найдем немало великих ученых, придерживавшихся, пусть недостаточно последовательно, но все же материалистической точки зрения в вопросе о происхождении математических понятий. Достаточно указать на Галилея, Декарта, Ньютона, Лапласа, а из философов—на Аристотеля, Гоббса и Гольбаха.

Во-вторых, важно выяснить пути развития учения Энгельса о происхождении и развитии математических понятий. Этих путей два, хотя они органически связаны между собой.

«Продолжение дела Гегеля и Маркса,—писал Ленин,—должно состоять в диалектической обработке истории человеческой мысли, науки и техники».

Энгельс дал нам основы основ понимания основного вопроса методологии математики—понимание процесса развития математики. Но Энгельс дал это понимание, развив с Марксом диалектико-материалистическое понимание истории в целом плюс несколько замечаний об истории математики. Наша задача поэтому заключается в том, чтобы облечь эти основы основ в «плоть и кровь» истории математики.

---

[1]) Чебышев, т. I, стр. 239. См. также В. Стеклов, Теория и практика в исследованиях Чебышева, 1921 г.

Обогащение и развитие марксизма-ленинизма за счет диалектико-материалистической обработки истории математики важно еще по трем причинам. Во-первых, достаточно детальная разработка истории математики разобьет теоретические основы всякого математического идеализма. Она покажет, что история математики говорит за марксистское понимание математики в основном для всякой методологии математики вопросе—в вопросе о происхождении и развитии математических понятий. Во-вторых, диалектико-материалистическая разработка истории математики дает чрезвычайно ценный материал для преподавания математики как в средней, так и в высшей школе. В-третьих, диалектико-материалистическая разработка истории математики эпохи империализма, выяснив специфические закономерности развития математики в эту эпоху, дает нам возможность более осмысленно осуществлять планирование развития математики.

Диалектико-материалистическая разработка истории математики представляет первый путь в деле развития учения Энгельса о происхождении и развитии математических понятий—путь изучения прошлого математики.

Второй путь связан с будущим математики. Теоретическая разработка учения Энгельса о происхождении и развитии математических понятий в связи с развитием математики у нас в СССР эквивалентна теоретической разработке вопросов планового развития математики. Планирование развития математики в такой же мере практическая, как и теоретическая проблема. Решение этой проблемы, имеющей большое значение для соцстроительства, есть дело наших научно-исследовательских математических институтов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Х. Д. МЕЛЛЕР, проф. Техасского университета

НАУКА ПРОШЛОГО И НАСТОЯЩЕГО И ЧЕМ ОНА ОБЯЗАНА МАРКСУ

Не только работающие в области социальных наук, но и занимающиеся естественными науками имеют особые причины прославлять жизнь Карла Маркса и воздавать уважение его памяти к 50-летию со дня его смерти, когда правильность его учения подтверждается больше, чем когда-либо. Ибо Маркс предвидел в своем учении о материалистическом понимании истории, что триумф революционного движения, которое он сам возглавлял, должен послужить прелюдией к освобождению безграничных человеческих и материальных сил для дальнейшего развития наук, естественных так же, как и социальных, и теоретических так же, как и прикладных, как главного орудия, при помощи которого в будущем может быть повышено благосостояние рабочих мира. Диалектический материализм Маркса и Энгельса, заложивший непосредственные основы скорее рационального, чем «рационализированного», подхода к научным проблемам вообще, сможет тогда непосредственным образом действовать в дальнейшей работе науки. В этом отношении Маркс сознательно подготовлял путь для такого века науки, по сравнению с которым теперешнее состояние науки покажется варварским.

Конечно развитие науки прямым образом стимулировало те методы массового производства, которые характерны для капитализма, и вместе с тем в свою очередь стимулировалось ими, и потому вполне естественно, что буржуазный класс, подымающийся на этой волне, поощрял научную деятельность. Тем не менее, несмотря на беспримерное развитие науки при

капитализме, наука никоим образом не может при этой системе достигнуть той высоты, которая соответствовала бы развитию современных производительных сил, и противоположные течения усиливают свою работу, заражая науку в самой ее сердцевине. Ибо все обостряющиеся противоречия создают условия все более и более враждебные для поисков социально-полезной истины. Внутренние противоречия социальной системы становятся таким образом все более и более очевидными даже в области науки, и последняя вследствие этого подвергается извращениям и ограничениям, серьезность которых сами ученые обычно недостаточно ясно понимают.

Для защиты разрушающейся системы, защитить которую нельзя, некоторые из наиболее важных обобщений, как обобщения диалектического материализма и (в связи с этим) основные принципы физики, биологии и социологии, подвергаются отрицанию или фальсификации, а суеверия и неправильные идеалистические или механистические толкования находят поддержку и поощрение, в результате чего немалая часть времени ученых и приверженцев науки уходит на преследование ложных целей и употребление ложных методов. Как правило, приобретение, так же как и применение, знаний, могущих принести пользу человечеству, но не содержащих вероятной немедленной выгоды для их распространения, получают сравнительно скудную поддержку. Общая наука не получает необходимой материальной поддержки, потому что «бизнес»—война, и тому, кто не ведет постоянной борьбы за прибыль, приходится нести потери. Правда, крупные финансисты иногда бывают достаточно суеверны для того, чтобы желать спасти свои души (и в то же время прославить свои имена) путем пожертвований и завещаний, но эти случайные отклонения незначительны по сравнению с нуждами и возможностями науки. В результате различные важные исследования и применения науки, имеющие искусственное, а не деловое значение, особенно те, которые требуют широкого сотрудничества,— совершенно не предпринимаются, а те, которые противоречат буржуазным интересам, прямо опротестовываются или задерживаются. Вместе с тем университетских профессоров «чистой науки» поощряют к кропотливому разрешению мелких вопросов и бессмысленной педантичности, которые могут скорее послужить украшением для привилегированных, чем приводить жизненные проблемы к разрешению, могущему оказаться опасным для теорий или практики капитализма. Эти изолированные изыскания, естественно, зачастую приводят к бессмысленному «академическому» столбняку, слепоте и глухоте ко всему миру и часто даже к равнодушию к собственной задаче: при этих условиях ученые могут наиболее честно дезориентировать молодое поколение. С философской стороны среди ученых существуют тенденции или к подчинению известному пессимистическому штампу (Джинс) или к самоодурманиванию иллюзиями (Лодж), причем ни одна из этих тенденций не имеет твердого базиса в науке, но представляют реакцию части ученых на полную безнадежность индивидуалистических мотивов и методов в обществе, человеческие производительные силы которого являются социальными и природные силы которого столь огромны, что они делают индивидуум как таковой исчезающе малой величиной. Те, которые, несмотря на эти препятствия, продолжают деятельно преследовать свою цель, часто бывают движимы главным образом чувством личного тщеславия и карьеризма, поощряемые той системой частной выгоды, в которой они живут. Это опять-таки не способствует наилучшим результатам в области «искания истины».

Даже в области непосредственно практических изобретений имеющиеся средства не используются наилучшим образом. Это происходит отчасти вследствие ограниченности умственного кругозора деловых людей, имеющих контроль над расходами (ограниченность, порожденная их тренировкой на одном только бизнесе), отчасти же потому, что крупные изобретательские силы тратятся на развитие годных к продаже подделок и многих других расточительных и даже прямо разрушительных методов капиталистической конкуренции, тогда как многие полезные изобретения просто скупаются и уничтожаются объединениями как вредящие их собственным делам. Существует и более общая причина ограниченности научной продукции— как прикладной, так и теоретической—ограниченности, которую она разделяет со всякой другой продукцией при капитализме. Дело в том, что вследствие внутренних антагонизмов капитализма, его кризисов и безработицы,

становящихся все более глубокими и хроническими, его производственный механизм может осуществить лишь незначительную часть своей максимальной эффективности и принужден двигаться на значительно сниженном уровне. А когда бывает необходимо сократить расходы, наука, которая редко бывает выгодна для краткосрочных капиталовложений, страдает больше других. Развитие человеческих ресурсов, которое помогло бы научной работе, явно тормозится классовой организацией общества, во-первых, по причине большого ограничения возможностей (часто сводящегося к фактическому исключению «низших» классов, рас и пола) научного образования и соответствующего научного положения и, во-вторых, потому, что наиболее способные из тех, кто имеет необходимые возможности, соблазняются более выгодными и следовательно также более уважаемыми должностями в деловом мире. Для науки остается главным образом второстепенный слой неудачливой мелкой буржуазии. Тем не менее, несмотря на препятствия, наука должна двигаться вперед, и поскольку она делает это, она невольно, будучи «поддержкой» капитализма, увеличивает его противоречия и таким образом приближает освобождение рабочих и вместе с ним—освобождение самой науки.

В социалистическом обществе все вышеперечисленные обстоятельства уничтожаются. Отбрасывая суеверия, которыми их сковывали их хозяева, массы приходят к признанию в науке истинного пути к их непрерывному самоусовершенствованию и росту. Их наука, очищенная от наростов и ограничений капиталистической идеологии, впервые правильно познавая (посредством диалектического материализма Маркса) развивающийся внешний мир в его сложных и взаимно связанных степенях и стадиях развития с присущими каждой из них особыми законами, может свободно следовать по этим путям, на которых она обретает свою действительную мощь. Тогда можно будет открыто признать, что двигателем науки является не только любопытство, ценное как побудительный мотив, но более сильное социальное стремление к могуществу и жизни, к успеху в экономической борьбе в наибелее широком смысле этого слова. В этой борьбе, теперь направленной скорее против природы, чем против других человеческих классов, любознательность, предприимчивость, интерес к общему делу, желание помочь другим, желание проявить себя, дружеское соперничество и другие человеческие импульсы могут играть свою роль, но они будут контролироваться и координироваться более общей социальной целью, которая преобладает над всей структурой и функционированием социализированной экономической системы и вливает в нее воодушевление, чрезвычайно удовлетворяющее, так же как и стимулирующее, ее участников.

Одновременно с активным распространением плодов и возможностей цивилизации среди всего народа и с познаванием им общего социального совершествования мира как величайшего блага население в целом все ближе знакомится с боями на научном фронте, все более интересуется и занимается ими. Таким образом резервы людей, пригодных для научных исследований, становятся все шире и больше, и все большее число тех последователей науки, которые непосредственно втягиваются в нее, и все увеличивающиеся массы широкого населения привыкают находить удовольствие в поддержке многочисленных отраслей науки, для которых полезно широко развернутое сотрудничество. В результате наука проникается новым энтузиазмом и новой широтой перспективы. Спертая атмосфера тщеславного индивидуализма подвергается здоровой вентиляции; кропотливость и педантичность приобретают свои настоящие пропорции; пессимизм теряет свою пищу. Поскольку социалистические производственные отношения дают большие результаты, больше средств освобождается для науки, которая в свою очередь, насколько возможно, увеличивает средства промышленности и таким образом приобретает растущие средства, энергию и кадры для дальнейшего распространения в пространстве и времени, для укрепления своей силы и анализа, для создания теоретической структуры, охватывающей все более и более широкие области действительного мира, неорганического, биологического и социального, изображая и контролируя их все более верно и следовательно все с большей пользой. Таким образом экономическая борьба постоянно поднимается на высшую ступень, становится более теоретически обоснованной и увеличивает свой охват, поскольку она растет на своих победах и все теснее увязывает теорию с практикой. Таким образом

люди вырастут в сознательных деятелей, отвоевывающих свою судьбу у упрямого материального мира, и, как сказал Маркс, они достигнут на этом пути высочайшей степени свободы в единственно разумном смысле этого слова.

Д. Ж. СТРОЙК, проф. в Кембридже, Массачузетс, САСШ.

МАТЕМАТИКА И МАРКСИЗМ

1. Математика обычно представляется абстрактной наукой, законы и рассуждения которой кажутся независимыми от того или иного периода истории человечества. Марксистский анализ показывает, что здесь имеется лишь относительная независимость. Между развитием и исследованиями математики в течение определенного исторического периода и социальной структурой этого периода существует тесная связь. Подобная же связь существует во всех остальных науках с той только разницей, что предмет изучения математики более абстрактен, нежели предмет изучения почти всех остальных наук. Эта связь в математике труднее уловима: для того чтобы ее понять, марксистский анализ должен быть более углубленным.

2. Математика, как всякая другая естественная наука, объективна лишь постольку, поскольку она ставит своей целью изучение отношений реального мира, мира, в котором находится человек, в котором он действует и к которому принадлежит само человечество. Теорема Пифагора не является, подобно правилам игры в бридж, построением человеческого ума. Это—отношение, существующее во внешнем мире, но выраженное, как всякое научное утверждение, абстрактными терминами. Линии и поверхности, на которых построена теорема, являются отражением весьма реальных вещей, точно так же, как числа, употребляемые для выражения измерения этих линий и поверхностей. Это применимо и ко всем остальным утверждениям математики, так например $2+2=4$ является выражением реальной действительности, существующей во внешнем мире и следовательно независимой от какого-либо человеческого вмешательства.

Это не значит, что аксиоматика в понимании Эвклида или позднейшей интерпретации Гильберта является бесполезной. Когда Гильберт строит свою эвклидову геометрию как некоторую логическую игру с неопределенными элементами, где два элемента класса А (точки) определяют один элемент класса В (линия) и т. д., он выполняет не только занимательную, но и полезную работу. Однако эта работа освещает лишь одну сторону математики. Она вскрывает логическую зависимость, но не исчерпывает темы. Линия остается линией, даже если мы приучаем себя рассматривать ее всегда просто как элемент класса В. Безграмотные рабочие и сильнейшие математики имеют сходное представление о том, что такая линия—абстракция, выведенная из лозы, куска веревки или луча света. Эта абстрактная линия имеет бесконечное число свойств, которые аксиоматика может анализировать, но не исчерпать. Причина этого в том, что математика сводится не только к аксиоматике, не только к логике, но она является и естественной наукой, имеющей дело с количественными отношениями внешнего мира.

Последнее утверждение справедливо лишь в известном смысле. Конечно арифметика имеет дело с чистым количеством, но в геометрии уже налицо качественные отношения. Геометрические исследования за последние 100 лет имели тенденцию к развитию в сторону качества, поскольку они переходили от эвклидовой геометрии к пространственной геометрии, от пространственной геометрии к топологии. Однако в своем развитии геометрия никогда не теряла своего количественного начала. Диалектическое развитие качества имеет также место в переходе от натуральных чисел к континиуму (от арифметики к алгебре и от алгебры к анализу). Абстрактная топология и общий анализ Мооч могут представлять в настоящее время два конца этой цепи абстракций. В самом деле, математика является ярким примером диалектического развития, в этом случае—категории количества.

3. Уже гегелевская «Логика» вскрывает многочисленные стадии этого развития. Кольман и Яновская недавно попытались, исходя из современной точки зрения, подвергнуть Гегеля критике. Предстоит еще значительная работа по

классификации и уяснению различных отраслей математики, и для сохранения единства математики необходимо эту работу проделать. В настоящее время слишком много математиков занято исключительно какой-либо одной мелкой темой и соответственно не способны к восприятию общей точки зрения. На математических конгрессах немногие люди понимают друг друга,—положение, которое в конце концов должно привести к гибели математики. Связь, родство, классификация уже трактовались великими учеными с интуитивным диалектическим пониманием. Все великие математики являются в своей области великими диалектиками, но за редкими исключениями (например Лейбниц)—лишь бессознательными. В качестве свежего примера мы можем взять работу Ф. Клейна, не только глубоко диалектическую по природе, но и полную материалистических наметок. Однако Клейн не может быть назван марксистом, хотя его работа во многом замечательно соответствует учению диалектического материализма. По той же причине не может быть назван марксистом Дарвин, работы которого высоко ценили Маркс и Энгельс.

Мы должны действовать осторожно и всегда помнить о том, что гегелевская диалектика была диалектикой идеалистической, тогда как марксова диалектика является материалистической. Применительно к математике это означает, что мы должны всегда рассматривать диалектику арифметики и геометрии, как диалектику внешнего мира, постигнутую в процессе человеческой деятельности. Эта мысль все еще непривычна для широких кругов. Математика, проповедуют современные учебники, развивается почти исключительно через свою внутреннюю диалектику, без всякой очевидной связи с реальным миром. Эвклидова геометрия переходит в проэктивную геометрию путем некоторых чисто математических операций, а подобным же процессом создается топология. Это саморазвитие концепций, подобное саморазвитию абсолютного у Гегеля. Оно имеет свое искусное оправдание и имеет свое право на существование в научных работах и учебниках, ибо мы не можем ожидать, чтобы все учебники математики строились по программе марксова «Капитала». Но это только одна сторона вопроса.

Переход от одной стадии развития математики к другой является в то же время переходом, существующим в реальном мире и подвергшимся человеческому анализу, и только это придает ему то значение, которое он имеет. Математика—это необходимо повторять—это не игра в карты или в шахматы, хотя и в этих играх участвует математика, как она участвует почти всюду. Математика—это нечто большее. Так например проэктивная геометрия имеет значение не только потому, что она углубляет наше теоретическое знание, но и по причине ее отношения к начертательной геометрии, перспективе и оптике, поскольку все науки представляют стадии развития человеческой деятельности. Эти простые отношения в математике, очень часто соответствующие простым отношениям во внешнем мире, являются только дополнительным примером тесного родства между математикой и природой.

Известная математическая школа заявляет, и даже с гордостью, что математика—наука, в которой никто не знает того, о чем он говорит. Марксизм энергично восстает против этого утверждения. Мы очень хорошо знаем то, о чем мы говорим в математике, и мы можем назвать это диалектическим развитием количественного аспекта реального мира. Мы понимаем предмет изучения математики так же хорошо, как и предмет изучения всякой другой науки. Это понимание не является полным пониманием, но скорее пониманием в диалектическом смысле,—таким, которое излагает, связывает и собирает материал и которое все расширяет и расширяет свое содержание, не исчерпывая предмета изучения.

4. До сих пор мы разбирали объективный характер математики. В ее истории и в ее применении вообще мы открываем и ее другую сторону, ее зависимость от социальной и экономической структуры общества. По причине своего объективного характера математика изучает взаимоотношения человечества с природой, взаимоотношения, которые изменяются от периода к периоду, от класса к классу. Сама объективность математики подразумевает ее субъективность; последняя вытекает из первой. Для удовлетворения своих нужд человечество нуждается в количественных знаниях; природа этих знаний однако различна у новозеландского племени, аристократов древней Греции, феодальных лендлордов, торговцев XVII в. или современных капиталистов. Не только сумма этих знаний, но и их интерпретация различны. Пифагоров числовой мистицизм, платоново увлечение геометрией, картезианский рацио-

нализм и кантов априоризм имеют свои корни в социально-экономических условиях. Марксистский анализ позволит нам понять эти различные взаимоотношения.

Прежде всего учения великих мыслителей не влияют на человечество путем простого и деликатного убеждения. Великие мыслители представляют образ мышления известных классов, и судьба их теорий зависит от судьбы этих классов. Учения Фомы Аквинского, завоевавшие феодальную иерархию позднейшего средневековья, теряют свою силу с победой раннего капитализма. Ньютоновская теория тяготения завоевала Францию и с ней весь западный мир, потому что революционная буржуазия XVIII в. пользовалась ею как оружием в своей победоносной борьбе против феодальных классов. Точно так же победа марксизма зависит от победы пролетариата, интересы которого он представляет.

Это не должно означать, что теории Фомы Аквинского, Ньютона или Маркса и Энгельса не содержат объективной истины. Объективная истина марксизма доказана триумфом пролетариата, так же как современное объяснение движения небесных тел доказало правильность теории Ньютона. Объективность и субъективность связаны между собой, представляя каждая лишь одну сторону предмета. Одной объективной справедливости теории недостаточно для ее восприятия; доказательством этому служат учения, которые шли «впереди своего времени». Архимед интегрировал параболический сегмент, но только XVI столетие смогло оценить его; объективная справедливость взгляда Декарта на геометрию получила широкое признание только после того, как французская революция создала школу диалектически мыслящих геометров.

5. Открытие в XVII в. аналитической геометрии объясняется социально-экономическими причинами. Ни древность, ни средневековье не могли притти к этому отношению между алгеброй и геометрией. Для этого достижения было необходимо, во-первых, открытие числового континиума. Греки знали только положительные целые числа и положительные дроби, они даже не признавали единиц за число. Диалектическое развитие, которое привело к открытию отрицательных и иррациональных чисел, принадлежит к раннему капитализму. До этого времени существуют некоторые виды этих чисел. С XVI в. однако они становятся все более и более общими. Иррациональные числа 2, 3 и т. д. встречаются почти во всех школьных учебниках по арифметике того времени. Логарифм арабских чисел, введенный итальянскими торговцами, становится могущественным средством распространения этих концепций. В конце XVI в. существовала благодаря арифметическим запросам торговцев, моряков; землемеров и солдат—а это были весьма материальные запросы—более или менее общая концепция числового континиума, хотя точный анализ этого континиума существует лишь с XIX в.

Это расширение арифметики привело к ее «отрицанию» в гегелевском смысле, к алгебре, в которой специфическое число теряет свою тождественность в общем символе. Это было главным образом работой Вьета в конце XVI в. Общий символ алгебры сохраняет к специфическим числам арифметики отношение, несколько похожее на отношение в экономике меновой стоимости к потребительной стоимости. За общими символами алгебры стоит абстрактное буржуазное общество, производящее абстрактную стоимость абстрактным трудом для абстрактного рынка. Возможен анализ «фетишизма» алгебраических символов подобно марксову анализу «фетишизма» товаров. Таким образом тенденция капиталистического общества к развитию высших абстракций в религии (католицизм, кальвинизм, унитаризм) и экономике проявляется также и в математике. Именно тогда Декарт, первый буржуазный философ, вступил в область математики и скомбинировал алгебру с геометрией. Геометрия уже имела свой континиум, анализированный еще Пифагором. Соединив вместе алгебру и геометрию, Декарт сообщил геометрии быстро усиливающееся диалектическое развитие алгебры. Это побудило алгебру перейти в свое второе «отрицание», в анализ, и она могла перейти в эту стадию только через свою связь с геометрией. Это показано в работах Декарта и его последователей—Роберваля, Паскаля, Торичелли, Уоллиса, Ньютона, Лейбница и многих других.

6. Эти явления не случаются в атмосфере чистых умозаключений, без постоянного подталкивания действительностью. Открытие алгебры могло явиться только результатом нужд постепенно вырастающего капиталистического класса. Этот рост характеризовался увеличивающимся разделением труда, ставшим

возможным благодаря постепенному усовершенствованию техники. Эта техника была очень специального рода, того рода, который мы можем назвать чисто механическим. Он состоит в употреблении, усовершенствовании и изучении простых насосов, рычагов, передач, балистических инструментов, ветряных и водяных мельниц, парусных судов, простых измерительных приборов, часов и маятников. Когда авторы этого периода пожелали изучить сложную машину, они выбрали карманные часы. В материалистической литературе того времени человеческое тело сравнивается с карманными часами, но все эти инструменты являются механическими. Изучение этих механизмов привело следовательно к кинематике и динамике. Соответствующие выводы были достигнуты и в области изучения небесных явлений.

Но механика требует изучения движения, таинственного природного явления, диалектика которого ставила в тупик еще греков. Мы видим, что все великие ученые того времени заняты анализом движения (Коперник, Кеплер, Стевин, Галилей, Декарт, Ньютон и Лейбниц). Это одна из главных причин того, что математика этих людей концентрировалась на элементах анализа. Таким образом открытие аналитической геометрии явилось шагом, который привел после 50 лет исследований и 50 лет капиталистической экспансии к окончательному открытию анализа.

7. Это только является примером, показывающим значение марксистского анализа для истории математики. Он дает нам возможность понять, почему известные области математики были открыты в известные периоды. Марксистский анализ проливает также свет на причины открытия многих «бесполезных» частей математики. Это тесно связано с позицией «науки ради науки», преобладавшей в университетах с середины XIX в. Корни этой позиции лежат в тенденции капитализма к отделению преподавания и исследования математики от ее практического применения. Этой тенденции однако в то же время противодействует тенденция использования преподавания и исследования для нужд производства. По этой причине в математике всегда существует жизненное ядро, даже во времена ее кажущейся оторванности от общества; извращения через некоторое время устраняются.

Руководящим принципом зачастую является не непосредственное давление со стороны крупных капиталистических предпринимателей или государства. Во многих случаях руководящим элементом в исследованиях математиков является глубокая интуиция. Например на работу Анри Пуанкаре конечно непосредственно не влияло прямое давление со стороны. Его философский идеализм, атакованный Лениным, восставал против всякой материалистической интерпретации; Пуанкаре всегда считал, что ищет «истину». Но его научное проникновение было таким сильным, что вся его работа, даже самые его абстрактные рассуждения, является ценным сокровищем для многих грядущих поколений человечества.

8. Этот индивидуализм является одной из основных слабостей абстрактных научных исследований при капитализме. Он не является обязательной принадлежностью науки. Каждое общество имеет свою собственную науку, свой собственный взгляд на математику и свой собственный тип математиков. Мы должны ожидать, что при социалистической форме производства этот индивидуализм уступит место коллективистической концепции мира. При современном капитализме ни один ученый не чувствует, что он работает для общества. Он работает во имя «истины», или для усиления, или в помощь какой-либо прикладной науке, как физика, химия, биология или инженерное дело, и он надеется, что тем или иным путем его работа пойдет на пользу человечеству. Этот взгляд радикально изменится при плановом хозяйстве, которое возможно только на социалистическом пути. Путем координации всех производительных научных сил можно будет достигнуть результатов, которые рано или поздно послужат невиданному повышению благосостояния человечества в целом. Бесполезная трата производительных сил будет в этом случае сокращена до минимума. Математика не только испытает небывалый рост, но математики будут сознавать, что их работа является существенной частью социального совершенствования. При империализме эти науки действуют не столько созидающе, сколько разрушающе. Чем больше разлагается капиталистическое общество, тем сильнее преобладают разрушительные тенденции, вызывающие безработицу и войны. Математики также участвуют в этой разрушительной работе.

Конечная победа рабочего класса окажет еще и другое влияние на мате-

матику. Хотя и являясь абстрактной наукой, математика тесно связана с прикладными науками, с физикой, химией, биологией и инженерным делом. Баллистика, атомная физика, прикладная механика, химия, радио и многие другие отрасли нуждаются в математике для разрешения своих проблем, и ответы, которые она дает, помогают разрешению этих проблем. Только уничтожение классов может покончить с этой стороной научной работы, стороной, которую большинство ученых людей настоящего времени ненавидит в такой же степени, в какой не понимает способа ее устранения.

Мы видим следовательно, что при существовавшей капиталистической системе математике нехватает ясного представления о ее проблемах и основах, что приводит к ряду «кризисов». Ее развитие нарушается слишком большим количеством случайных работ, уравновешиваемых только до известного предела интуициями великих математиков и требованиями прикладных наук.

Кроме того те же самые требования приводят математику к оказанию поддержки разлагающейся экономической системы, которая истощает ее силы в пустых, разрушительных занятиях.

Только победа рабочего класса, результатом которой явится организация социалистического общества, может радикально изменить положение. Было бы неверно утверждать, что математика не может вовсе дальше развиваться в капиталистическом обществе. Блестящие открытия, сделанные на наших глазах, показывают, что капитализм даже в своей агонии поддерживает еще абстрактную мысль, даже если жизненный уровень ученых становится все более и более низким. Но только социализм может устранить трудности и поднять науку в целом на высшую ступень. Это является причиной того, что все больше и больше ученых с интересом и сочувствием наблюдает за развитием мысли и действия в Советском союзе.

9. Таким образом мы приходим к следующим заключениям:

а) В применении к математике марксизм может привести к полному изучению ее классификации, ее внутреннего развития, внутренней связи ее предмета и оценке ее значения.

б) Марксизм делает возможным понимание сущности математики, которое может привести к усилению ее основ, к пониманию ее отношения к другим наукам, к пониманию соответствующего значения различных школ математического мышления и значения математики для общей концепции мира.

в) Марксизм делает возможной реальную историю математики, показывающую ее диалектическое развитие в истории путем связывания ее с социально-экономической структурой различных периодов.

г) Марксизм ведет к пониманию исследовательской деятельности современных математиков, их идеалов, их силы и их слабости.

д) Показывая, как каждый тип общества создает свой собственный тип науки и свой собственный тип ученых, марксизм дает нам возможность понять, как социалистическое общество может создать свою собственную науку и ученых, понять возможность существования «социалистической математики», так же как были возможны «капиталистическая математика» или «древняя математика».

е) В области преподавания марксизм может привести к отбору материала и развитию методов преподавания, адекватных требованиям социалистического общества.

ж) Мы можем надеяться, что планирование научных исследований в социалистическом обществе под руководством высококвалифицированных людей, людей, владеющих диалектическим материализмом, расширит область математических исследований и поднимет науку на уровень, невиданный при капитализме. Так же как первые буржуа, варвары с точки зрения феодальных профессоров, создали в конечном итоге математику, значительно высшую, нежели математика предшествовавших веков, так же и мы можем надеяться, что рабочий класс, строящий общество с несравненно более высокой культурой, чем культура капиталистическая, сможет дать удивительный рост математики.

з) Социализм перенесет математику из области теории в область действия, область, которую она окончательно никогда не покидала, но отчуждение от которой она чувствует.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА	
ОТ ИНСТИТУТА МАРКСА, ЭНГЕЛЬСА, ЛЕНИНА	4
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РУКОПИСИ К. МАРКСА	5
Э. Кольман. Триумф марксизма — науки пролетариата	62
И. Новинский. О работе Маркса над вопросами естествознания	80
С. Семковский. Физика и химия как науки в свете марксизма	91
П. Бондаренко. Маркс и Энгельс о биологии (по материалам переписки)	125
С. Яновская. О математических рукописях К. Маркса.	136
В. Молодший. Энгельс о происхождении и факторах развития математики	181

ПРИЛОЖЕНИЯ

Х. Д. Меллер. Наука прошлого и настоящего и чем она обязана Марксу	204
Д. Ж. Стройк. Математика и марксизм	207

Редактор Л. *Кузьмин*
Техредактор *В Виноградов*
Переплет раб. худ. *Велем*

Сдано в производство 23/IV-1933 г. Подписано в печать 27/VII-1933 г. Уп. Главлита Б-31137. Партиздат № 281. Формат 62×94/16. 13¼ п. л. 53000 зн. в п. л. Заказ 6732. Тираж 20000 э. Третья фабрика книги ОГИЗа РСФСР треста «Полиграфкнига» «Красный пролетарий» Москва Краснопролетарская 16.